Introducción a la Relatividad General - 2020 **GA Silva - D Pérez**
Departamento de Física - UNLP silva@fisica.unlp.edu.ar
daniela.perez2812@gmail.com
v1 2020/08/28

Práctica I: Tensores y Transformaciones Generales de Coordenadas

1. Simetría y antisimetría son propiedades tensoriales:
(i) Mostrar que si un tensor de segundo orden covariante $\binom{0}{2}$ es simétrico en un dado sistema de coordenadas, lo es en cualquier otro.
(ii) Mostrar que si $X^{\mu\nu}$ es antisimétrico y $Y_{\mu\nu}$ simétrico, entonces
$$X^{\mu\nu}Y_{\mu\nu} = 0.$$
Asimismo, mostrar que
$$X^{\mu\nu}A_{\mu\nu} = X^{\mu\nu}A_{[\mu\nu]} \qquad\qquad B^{\mu\nu}Y_{\mu\nu} = B^{(\mu\nu)}Y_{\mu\nu}$$
para $A_{\mu\nu}$ y $B^{\mu\nu}$ arbitrarios, donde
$$A_{[\mu\nu]} = \frac{A_{\mu\nu} - A_{\nu\mu}}{2} \qquad\qquad B^{(\mu\nu)} = \frac{B^{\mu\nu} + B^{\nu\mu}}{2}\,.$$
$A_{[\mu\nu]}$ denota la parte antisimétrica del tensor $A_{\mu\nu}$ y $B^{(\mu\nu)}$ denota la parte simétrica del tensor $B^{\mu\nu}$.

2. Contracciones son covariantes:
(i) Probar que si $T_{\mu\nu}$ es un tensor, entonces $T_{\mu\mu}$ no es un escalar frente a difeomorfismo.
(ii) Sea $X^{\mu}{}_{\nu\rho}$ es un tensor $\binom{1}{2}$, mostrar que $Y_\rho = X^{\mu}{}_{\mu\rho}$ es un tensor $\binom{0}{1}$.
(iii) ¿Cuánto vale el invariante $g^{\mu}{}_{\mu}$ obtenido de la contracción del tensor métrico $g_{\mu\nu}$, si el espacio-tiempo es n-dimensional?

3. Ley del cociente: Probar que si $P_{\mu\nu\rho}$ es tal que $A^\mu P_{\mu\nu\rho}$ es un tensor para cualquier vector A^μ, entonces $P_{\mu\nu\sigma}$ es un tensor. Esta afirmación vale para tensores de cualquier orden.

4. Conexión afín y sus propiedades
(i) Mostrar que, bajo una transformación general de coordenadas, la conexión de Levi-Civita
$$\text{Levi-Civita}: \quad \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}(g) = \left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ \mu\beta \end{array} \right\} \equiv \frac{1}{2} g^{\alpha\gamma}(\partial_\mu g_{\beta\gamma} + \partial_\beta g_{\mu\gamma} - \partial_\gamma g_{\mu\beta}) \tag{1}$$
transforma como:
$$\Gamma'^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho}\frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu}\Gamma^{\rho}_{\tau\sigma} + \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho}\frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x'^\mu x'^\nu}. \tag{2}$$
(ii) Diferenciando la identidad:
$$\frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho}\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} = \delta^\lambda_\nu, \tag{3}$$
con respecto a x'^ν, reexpresar la expresión (2) como
$$\Gamma'^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho}\frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu}\Gamma^{\rho}_{\tau\sigma} - \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\mu}\frac{\partial^2 x'^\lambda}{\partial x^\rho x^\sigma}. \tag{4}$$
(iii) Mostrar que la parte antisimétrica (torsión) de la conexión transforma como un tensor
$$\text{Torsión}: \quad T^{\mu}_{\rho\sigma} \equiv 2\Gamma^{\mu}_{[\rho\sigma]}$$

5. p-formas y símbolos de Christoffell:
(i) Mostrar que si A_μ es un co-vector, $\partial_\mu A_\nu$ no es un tensor $\binom{0}{2}$.
(ii) Sin embargo, mostrar que su parte antisimétrica $F_{\mu\nu} \equiv 2\partial_{[\mu}A_{\nu]} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ si lo es.
(iii) Mostrar que $F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu$ si la conexión afín es simétrica (torsión=0).
(iv) Asumiendo una conexión simétrica, mostrar que la identidad de Bianchi para el tensor de campo electromagnético puede ser escrita como
$$\nabla_{[\rho}F_{\mu\nu]} = \partial_{[\rho}F_{\mu\nu]} = 0$$

6. Derivada covariante es un tensor:

   (i) Mostrar que $\nabla_\mu \nabla_\nu \phi = \nabla_\mu \partial_\nu \phi$ transforma como un vector.
   (ii) Mostrar que $\nabla_\mu V^\nu$ transforma como un tensor $\binom{1}{1}$.
   Sugerencia: utilice las expresiones (2) y (4).

7. Geodésicas:
   (i) Suponga un tensor $p^\mu(\tau)$ definido sobre la curva $x^\mu(\tau)$ que transforma frente a TGC como

$$p'^\mu(\tau) = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} p^\nu(\tau).$$

   Muestre que definiendo la derivada covariante a lo largo de la curva $x^\mu(\tau)$ como

$$\frac{Dp^\mu}{D\tau} \equiv \frac{dp^\mu}{d\tau} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} \frac{dx^\nu}{d\tau} p^\lambda \quad \rightsquigarrow \quad \frac{Dp^\mu}{D\tau} \quad \text{es un vector}$$

   (ii) ¿Qué condición propondría para decir que un vector $p^\mu(\tau)$ definido a lo largo de una curva $x^\mu(\tau)$ se transporta paralelamente a si mismo?

8. Densidades:

   (i) Sea $g_{\mu\nu}$ un tensor $\binom{0}{2}$. $g_{\mu\nu}$ pueden ser entendidas como las componentes de una matriz $n \times n$, de manera que podemos definir $g = |\det g_{\mu\nu}|$. ¿Cómo transforma g bajo cambios de coordenadas?

   (ii) Mostrar que $dv = d^n x \sqrt{g}$ es invariante frente a cambios de coordenadas. Evaluarlo para distintos sistemas de coordenadas: Cartesianas $x^\mu = (x, y, z)$ con $g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, 1, 1)$, polares $\tilde{x}^\mu = (\rho, \phi, z)$ con $\tilde{g}_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, \rho^2, 1)$ y esféricas $x'^\mu = (r, \theta, \phi)$ con $g'_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, r^2, r^2 \sin^2\theta)$.

   (iii) Mostrar que frente a TGC el *pseudotensor* de Levi-Civita $\epsilon_{\mu_1 \ldots \mu_n}$ en un espacio n-dimensional no es un tensor. Definido como $\epsilon_{12..n} = 1$ y totalmente antisimétrico.

   (iv) Mostrar que $\varepsilon_{\mu_1\ldots\mu_n} = \sqrt{g}\, \epsilon_{\mu_1\ldots\mu_n}$ y $\varepsilon^{\mu_1\cdots\mu_n} = \frac{1}{\sqrt{g}}\, \epsilon^{\mu_1\cdots\mu_n}$ transforman como tensores $\binom{0}{n}$.

   (v) Mostrar que $\varepsilon^{\mu_1\cdots\mu_n} \varepsilon_{\mu_1\ldots\mu_n} = (-)^t n!$ evaluando la contracción en signatura $(\underbrace{-\ldots-}_{t}\underbrace{+\ldots+}_{s})$.

9. Derivada covariante, Contracciones y Leibniz: Mostrar que

$$(\underbrace{V^{\alpha\beta}\, W_{\beta\gamma}}_{(T^\alpha_\gamma)_{;\mu}})_{;\mu} = V^{\alpha\beta}{}_{;\mu}\, W_{\beta\gamma} + V^{\alpha\beta}\, W_{\beta\gamma;\mu}$$

   La derivación covariante conmuta con las contracciones.

10. Operadores diferenciales y Conexión de Levi-Civita: considerar $\Gamma^\mu_{\nu\rho}(g) = \left\{ \begin{array}{c} \mu \\ \nu\rho \end{array} \right\}$ definida en (1).
    Mostrar las siguientes propiedades:

    (0) Sea $g = |g_{\mu\nu}| = \det g_{\mu\nu}$, mostrar que $g_{,\mu} = g g^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta,\mu}$.

    (i) $\Gamma^\mu_{\mu\nu} = \partial_\nu(\ln\sqrt{|g|})$ donde $g = \det g_{\mu\nu}$

    (ii) $\mathrm{div}\, \boldsymbol{V} = \nabla_\mu V^\mu = V^\mu_{;\mu} = |g|^{-1/2} \partial_\mu(|g|^{1/2} V^\mu)$

    (iii) $\nabla_\mu F^{\mu\nu} = (F^{\mu\nu})_{;\mu} = |g|^{-1/2} \partial_\mu(|g|^{1/2} F^{\mu\nu})$ si $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$

    (iv) $\nabla^2 f = g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu f = g^{\mu\nu} f_{;\mu;\nu} = |g|^{-1/2} \partial_\mu(|g|^{1/2} g^{\mu\nu} \partial_\nu f)$

    (v) $\nabla_\lambda \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = 0$ donde $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = \sqrt{g}\, [\mu\nu\rho\sigma]$ y $[\mu\nu\rho\sigma] = \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = 0, 1, -1$ dependiendo de la permutación ($\epsilon_{\mu\nu\ldots}$ es el Levi-Civita de espacio plano).

    Relación útil: $\partial_\lambda(\ln|\det a_{\mu\nu}|) = a^{\mu\nu} \partial_\lambda(a_{\mu\nu})$