Introducción a la Relatividad General - 2019 **GA Silva - D Pérez**
Departamento de Física - UNLP silva@fisica.unlp.edu.ar
daniela.perez2812@gmail.com

Práctica I: Tensores y Transformaciones Generales de Coordenadas v2 2019/09/02

1. Simetría y antisimetría son propiedades tensoriales:
(i) Mostrar que si un tensor de segundo orden covariante $\binom{0}{2}$ es simétrico en un dado sistema de coordenadas, lo es en cualquier otro.
(ii) Mostrar que si $X^{\mu\nu}$ es antisimétrico y $Y_{\mu\nu}$ simétrico, entonces
$$X^{\mu\nu}Y_{\mu\nu} = 0.$$
Asimismo, mostrar que
$$X^{\mu\nu}A_{\mu\nu} = X^{\mu\nu}A_{[\mu\nu]} \qquad B^{\mu\nu}Y_{\mu\nu} = B^{(\mu\nu)}Y_{\mu\nu}$$
para $A_{\mu\nu}$ y $B^{\mu\nu}$ arbitrarios, donde
$$A_{[\mu\nu]} = \frac{A_{\mu\nu} - A_{\nu\mu}}{2} \qquad B^{(\mu\nu)} = \frac{B^{\mu\nu} + B^{\nu\mu}}{2}\,.$$
$A_{[\mu\nu]}$ denota la parte antisimétrica del tensor $A_{\mu\nu}$ y $B^{(\mu\nu)}$ denota la parte simétrica del tensor $B^{\mu\nu}$.

2. Contracciones son covariantes:
(i) Probar que si $T_{\mu\nu}$ es un tensor, entonces $T_{\mu\mu}$ no es un escalar frente a difeomorfismo.
(ii)Sea $X^{\mu}{}_{\nu\rho}$ es un tensor $\binom{1}{2}$, mostrar que $Y_\rho = X^{\mu}{}_{\mu\rho}$ es un tensor $\binom{0}{1}$.
(iii) ¿Cuánto vale el invariante $g^{\mu}{}_{\mu}$ obtenido de la contracción del tensor métrico $g_{\mu\nu}$, si el espacio-tiempo es n-dimensional?

3. p-formas y símbolos de Christoffell:
(i) Mostrar que si A_μ es un co-vector, $\partial_\mu A_\nu$ no es un tensor $\binom{0}{2}$.
(ii) Sin embargo, mostrar que su parte antisimétrica $F_{\mu\nu} \equiv 2\partial_{[\mu}A_{\nu]} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ si lo es.
(iii) Mostrar que $F_{\mu\nu} \equiv \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu$ si la conexión afín es simétrica.
(iv) Asumiendo una conexión simétrica, mostrar que la identidad de Bianchi para el tensor de campo electromagnético puede ser escrita como
$$\nabla_{[\rho}F_{\mu\nu]} = \partial_{[\rho}F_{\mu\nu]} = 0$$

4. Probar que si $P_{\mu\nu\rho}$ es tal que $A^\mu P_{\mu\nu\rho}$ es un tensor para cualquier vector A^μ, entonces $P_{\mu\nu\sigma}$ es un tensor. Esta afirmación vale para tensores de cualquier orden y se conoce con el nombre de *ley del cociente*.

5. Derivada covariante es un tensor:
(i) Mostrar que $\nabla_\mu\nabla_\nu\phi = \nabla_\mu\partial_\nu\phi$ transforma como un vector.
(ii) Mostrar que $\nabla_\mu V^\nu$ transforma como un tensor $\binom{1}{1}$.
(iii) Mostrar que la
$$\text{Conexión de Levi-Civita}: \left\{ \begin{array}{c} \mu \\ \nu\rho \end{array} \right\} \equiv \frac{1}{2}g^{\mu\alpha}(\partial_\nu g_{\rho\alpha} + \partial_\rho g_{\nu\alpha} - \partial_\alpha g_{\nu\rho})$$
transforma como una conexión frente a transformaciones generales de coordenadas.

6. Geodésicas:
(i) Suponga un tensor $p^\mu(\tau)$ definido sobre la curva $x^\mu(\tau)$ que transforma frente a TGC como
$$p'^\mu(\tau) = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}p^\nu(\tau).$$
Muestre que definiendo la derivada covariante a lo largo de la curva $x^\mu(\tau)$ como
$$\frac{Dp^\mu}{D\tau} \equiv \frac{dp^\mu}{d\tau} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda}\frac{dx^\nu}{d\tau}p^\lambda \quad \rightsquigarrow \quad \frac{Dp^\mu}{D\tau} \quad \text{es un vector}$$
(ii) ¿Qué condición propondría para decir que un vector $p^\mu(\tau)$ definido a lo largo de una curva $x^\mu(\tau)$ se transporta paralelamente a si mismo?

7. Densidades:

   (i) Sea $g_{\mu\nu}$ un tensor $\binom{0}{2}$. En una sistema de coordenadas dado $g_{\mu\nu}$ pueden ser entendidas como las componentes de una matriz $n \times n$, de manera que podemos definir $g = |\det g_{\mu\nu}|$. ¿Cómo transforma g bajo cambios de coordenadas?

   (ii) Mostrar que $dv = d^n x\sqrt{g}$ es invariante frente a cambios de coordenadas. Evaluarlo para distintos sistemas de coordenadas: Cartesianas $x^\mu = (x, y, z)$ con $g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, 1, 1)$, polares $\tilde{x}^\mu = (\rho, \phi, z)$ con $\tilde{g}_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, \rho^2, 1)$ y esféricas $x'^\mu = (r, \theta, \phi)$ con $g'_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, r^2, r^2 \sin^2\theta)$.

   (iii) Mostrar que frente a TGC el *pseudotensor* de Levi-Civita $\epsilon_{\mu_1 \ldots \mu_n}$ en un espacio n-dimensional no es un tensor. Definido como $\epsilon_{12..n} = 1$ y totalmente antisimétrico.

   (iv) Mostrar que $\varepsilon_{\mu_1 \ldots \mu_n} = \sqrt{g}\,\epsilon_{\mu_1 \ldots \mu_n}$ y $\varepsilon^{\mu_1 \cdots \mu_n} = \frac{1}{\sqrt{g}}\,\epsilon^{\mu_1 \cdots \mu_n}$ transforman como tensores $\binom{0}{n}$.

   (v) Mostrar que $\varepsilon^{\mu_1 \cdots \mu_n}\varepsilon_{\mu_1 \ldots \mu_n} = (-)^t n!$ evaluando la contracción en signatura $(\underbrace{-...-}_{t}\underbrace{+...+}_{s})$.

8. Operadores diferenciales y Conexión de Levi-Civita: considerar $\Gamma^\mu_{\nu\rho} = \left\{ \begin{array}{c} \mu \\ \nu\rho \end{array} \right\}$.

   Mostrar las siguientes propiedades:

   (0) Sea $g = |g_{\mu\nu}| = \det g_{\mu\nu}$, mostrar que $g_{,\mu} = g g^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta,\mu}$.

   (i) $\Gamma^\mu_{\mu\nu} = \partial_\nu(\ln\sqrt{|g|})$ donde $g = \det g_{\mu\nu}$

   (ii) $\mathrm{div}\,\boldsymbol{V} = \nabla_\mu V^\mu = V^\mu_{\ ;\mu} = |g|^{-1/2}\partial_\mu(|g|^{1/2}V^\mu)$

   (iii) $\nabla_\mu F^{\mu\nu} = F^{\mu\nu}_{\ \ ;\mu} = |g|^{-1/2}\partial_\mu(|g|^{1/2}F^{\mu\nu})$ si $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$

   (iv) $\nabla^2 f = g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu f = g^{\mu\nu} f_{;\mu;\nu} = |g|^{-1/2}\partial_\mu(|g|^{1/2}g^{\mu\nu}\partial_\nu f)$

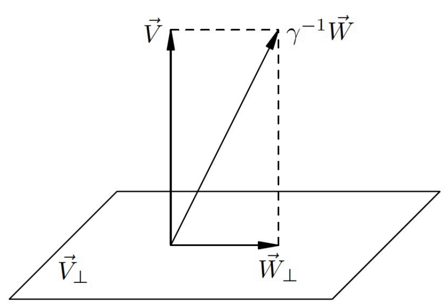
   (v) $\nabla_\lambda \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = 0$ donde $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = \sqrt{g}\,[\mu\nu\rho\sigma]$ y $[\mu\nu\rho\sigma] = 0, 1, -1$ dependiendo de la permutación (Levi-Civita de espacio plano).

   Relación útil: $\partial_\lambda(\ln|\det a_{\mu\nu}|) = a^{\mu\nu}\partial_\lambda(a_{\mu\nu})$

Ejercicios opcionales

9. Vector tangente a una curva es un vector: si bien las coordenadas x^μ no transforman como un vector frente a un cambios generales de coordenadas, mostrar que para toda curva $x^\mu(\tau)$, el "vector" velocidad definido en cada punto de la misma como $v^\mu(\tau) \equiv \frac{dx^\mu}{d\tau}$ transforma como un vector (cf. ej 6).

10. Proyección ortogonal: Considere dos observadores $\mathcal{O}$ y $\mathcal{O}'$ con velocidades $\boldsymbol{V} = V^\mu \boldsymbol{e}_\mu$ y $\boldsymbol{W} = W^\mu \boldsymbol{e}_\mu$ respectivamente. Descomponer la velocidad de $\mathcal{O}'$ como $\gamma^{-1}\boldsymbol{W} = \boldsymbol{V} + \boldsymbol{W}_\perp$ en donde γ es una constante positiva y $\boldsymbol{W}_\perp \cdot \boldsymbol{V} = 0$. Encuentre $\boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{W}$. ¿Qué relación hay entre γ y la velocidad relativa v entre los observadores?



11. Proyectores: Considere un cuadrivector tipo tiempo unitario $\boldsymbol{U}$ y el tensor $\binom{0}{2}$ dado por $\mathcal{P}_{\boldsymbol{U}} \equiv \boldsymbol{g} + \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}$, donde $\boldsymbol{g}$ es la métrica y $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{U}, \cdot)$, es decir $u_\mu \equiv U_\mu = g_{\mu\nu}U^\nu$.

    a) Mostrar que el tensor $\binom{1}{1}$ definido subiendo un índice a $\mathcal{P}_{\boldsymbol{U}}$ es un operador proyección sobre el subespacio ortogonal a $\boldsymbol{U}$.
    Ayuda: Escriba $V_\perp{}^\alpha = P^\alpha{}_\beta V^\beta$ y muestre que $\boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{V}_\perp = 0$. Muestre que $\boldsymbol{V}_\perp$ no se cambia frente a una nueva proyección.

b) Mostrar que en general, para un vector arbitrario no nulo $\boldsymbol{Q}$, el tensor de proyección sobre el subespacio ortogonal a $\boldsymbol{Q}$ se define subiendo un índice a

$$\mathcal{P}_{\boldsymbol{q}} \equiv \boldsymbol{g} - \frac{\boldsymbol{q} \otimes \boldsymbol{q}}{\boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{Q}} \qquad \boldsymbol{q} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{Q}, \cdot).$$

c) Mostrar que la acción de $\mathcal{P}_{\boldsymbol{U}}$ coincide con la de la métrica $\boldsymbol{g}$ para vectores ortogonoles a $\boldsymbol{U}$,

$$\mathcal{P}_{\boldsymbol{U}}(\boldsymbol{V}_{\perp}, \boldsymbol{W}_{\perp}) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{V}_{\perp}, \boldsymbol{W}_{\perp}) = \boldsymbol{V}_{\perp} \cdot \boldsymbol{W}_{\perp} \, .$$

12. Sean $\boldsymbol{V}, \boldsymbol{p}$ tales que $\boldsymbol{V}^2 \leq 0$ (causal) y $\boldsymbol{p}^2 = 0$, mostrar que si $\boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{p} = 0$ entonces $\boldsymbol{V} \propto \boldsymbol{p}$.

13. Sea $\boldsymbol{h}$ un tensor $\binom{0}{2}$. ¿Puede usted determinar si se trata de un tensor producto directo de dos formas dadas, $\boldsymbol{q}$ y $\boldsymbol{p}$?

    Ayuda: Mostrar que si para cualquier par de vectores $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$, se tiene $\boldsymbol{h}(\,\cdot\,, \boldsymbol{A}) = \alpha\, \boldsymbol{h}(\,\cdot\,, \boldsymbol{B})$ entonces existen $\boldsymbol{p}$ y $\boldsymbol{q}$ tales que $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{p} \otimes \boldsymbol{q}$.