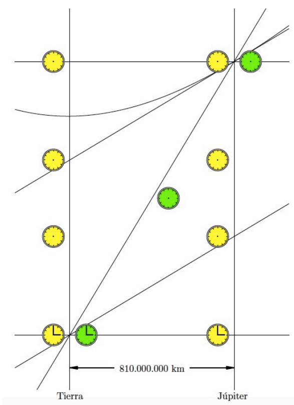
Introducción a la Relatividad General - 2019 **GA Silva - D Pérez**
Departamento de Física - UNLP silva@fisica.unlp.edu.ar
daniela.perez2812@gmail.com

Práctica 0: Relatividad Especial v3: 2019/09/02

1. Ausencia de tiempo absoluto: A las 15 hs. una nave espacial parte de la Tierra hacia Júpiter, siendo la distancia entre los planetas de 810.000.000 km. La velocidad de la nave es $\frac{3}{5}c$. Todos los relojes se sincronizan al momento de la partida. El reloj verde viaja en la nave, los relojes amarillos permanecen en reposo respecto a la Tierra/Júpiter.



- ¿Cuánto tarda el viaje para un observador en la Tierra?
- ¿Cuánto tarda el viaje para un observador en Júpiter?
- ¿Cuánto demora el viaje para los astronautas de la nave?
- ¿Qué hora marca el reloj jupiterino al arribar la nave?
- ¿Qué hora marca el reloj terrestre al arribar la nave?
- ¿Qué hora marca el reloj de la nave al arribar a Júpiter?

(a) Dibuje las lineas de mundo de la Tierra, Júpiter y la nave en el sistema de referencia fijo a la nave.

(b) Dibuje las agujas faltantes en los relojes de la figura. Al partir la nave se envia simultáneamente una señal luminosa hacia Júpiter. Indique la hora en el reloj de Júpiter al arribar la señal de luz enviada desde la tierra y la hora en el reloj de la nave en ese mismo instante.

2. 1+1 Minkowski: considerar dos sistemas inerciales $S, \bar{S}$ tales que $\bar{S}$ se mueve con velocidad v respecto de S. Escribir la matriz que relaciona las coordenadas $(t,x) \to (\bar{t},\bar{x})$: $\bar{x}^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu(v) x^\nu$.

Definiendo las coordenadas cono de luz como

$$x^+ \equiv x + t \qquad \text{y} \qquad x^- \equiv x - t\,.$$

a) Hallar la expresión para la transformación de Lorentz en coordenadas nulas.

b) Hallar la expresión para la métrica $ds^2 = -dt^2 + dx^2$ en coordenadas nulas. Mostrar que $\mathbf{\Lambda}(v)$ actua de manera muy simple en coordenadas nulas: $d\bar{x}^\pm = e^{\mp\theta} dx^\pm$ donde $\tanh\theta = v$. Es inmediato entonces ver que la métrica resulta trivialmente invariante.

c) θ se conoce como parámetro de velocidad, o *rapidity* en inglés. Expresando $\Lambda^\mu{}_\nu(v)$ como función de θ obtener

$$\Lambda^\mu{}_\nu(\theta) = \begin{pmatrix} \cosh\theta & -\sinh\theta \\ -\sinh\theta & \cosh\theta \end{pmatrix} \tag{1}$$

Determinar el dominio de θ. Componiendo dos transformaciones sucesivas mostrar que el grupo de Lorentz en 1+1 es abeliano y que $\mathbf{\Lambda}(\theta)\mathbf{\Lambda}(\theta') = \mathbf{\Lambda}(\theta + \theta')$

d) Es inmediato derivar que $\det \mathbf{\Lambda}_\theta = 1$ y $\mathbf{\Lambda}_\theta^{-1} = \mathbf{\Lambda}_{-\theta}$. Las transformaciones de Lorentz en 1+1 componen el grupo $SO(1,1) \leftrightarrow \eta_{\mu\nu} = diag(-1,1)$

e) Comparar el item anterior con la geometría euclídea en dos dimensiones: la transformación análoga a la transformación de Lorentz es la rotación $SO(2) \leftrightarrow \delta_{ij} = diag(1,1)$

$$\begin{aligned} \bar{x} &= x\cos\theta + y\sin\theta \\ \bar{y} &= -x\sin\theta + y\cos\theta\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Mostrar que estas transformaciones dejan invariante la métrica $ds^2 = dx^2 + dy^2$.

f) Escribir las expresiones infinitesimales de (1) y (2).

3. Efecto Doppler relativista:

   (i) Longitudinal: Considerar un sistema de referencia S donde observamos un fotón γ moviéndose según $\hat{x}$ con energía $h\nu$. Escribir su 4-impulso p^μ. En ese mismo sistema un observador $\mathcal{O}$ moviéndose con velocidad v también según $\hat{x}$ es alcanzado por el fotón. Escribir su 4-velocidad $(U_{\mathcal{O}})^\mu$. A partir de la expresión $\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{U}_{\mathcal{O}}$, mostrar que la energía $h\bar{\nu}$ medida por $\mathcal{O}$ es

$$\frac{\bar{\nu}}{\nu} = \sqrt{\frac{1-v}{1+v}}$$

   (ii) Transversal: Un grupo de astronautas que viajan en una nave espacial en línea recta, a una velocidad $v = 1/2$, pasan por la Tierra y desean escuchar una radio cuya frecuencia es 198 kHz. A qué frecuencia deberán sintonizar la radio en el instante que la nave se encuentra en su punto más cercano a la Tierra? (la dirección de propagación de las ondas es perpendicular a la velocidad de la nave).

4. Línea de mundo y fuerzas: La línea de mundo de una partícula, en un sistema de referencia inercial, está dada por

$$x(t) = b\sin(\omega t) \qquad y(t) = b\cos(\omega t) \qquad z(t) = a\,t\,,$$

   (i) Describa el movimiento y encuentre las componentes de la velocidad y aceleración de la partícula en este sistema de referencia.

   (ii) Hallar la fuerza que actua sobre la partícula si esta tiene masa m.

   (iii) Justificar la condición $a^2 + b^2\omega^2 < 1$ que deben satisfacer los parámetros.

5. Aceleración propia: consideremos una partícula en $\mathbb{R}^{1,1}$. Sean $x^\mu = (t, x)$ sus coordenadas en el sistema inercial S. La *aceleración propia* de la partícula, α, se define como la aceleración medida en el sistema de reposo instantáneo[1].

   (i) Llamando τ al tiempo propio, $v \equiv \frac{dx}{dt}$ y $a \equiv \frac{dv}{dt}$ mostrar que

$$a^\mu \equiv \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = (\gamma_v)^4(va, a) \;\; \text{luego} \quad \alpha^2 = a^\mu a_\mu$$

   donde, como de costumbre, $\gamma_v = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ siendo v la velocidad instantánea. Si suponemos que en el instante t la partícula tiene velocidad v respecto de S, la misma se encontrará instantáneamente en reposo en el sistema S' que se mueve con velocidad v respecto de $S \;\Rightarrow\; \alpha = \frac{dv'}{dt'}$.
   (ii) Mostrar que la aceleración medida en S está relacionada con la aceleración propia α por

$$a \equiv \frac{dv}{dt} = \frac{1}{\gamma_v^3}\alpha \tag{3}$$

6. Aceleración uniforme: puesto que el valor de la aceleración depende del sistema de referencia inercial donde se mide, cf. (3), al decir

   "*aceleración constante*" sería mas apropiado decir "*aceleración propia constante*"

   La línea de mundo de una partícula de masa m, en un sistema inercial, está dada paramétricamente por

$$t(\lambda) = \frac{1}{a}\sinh a\lambda \qquad \text{y} \qquad x(\lambda) = \frac{1}{a}\cosh a\lambda\,,$$

   con a una constante.

   a) Describa el movimiento de la partícula en un diagrama espacio-tiempo y muestre que λ es el tiempo propio a lo largo de la trayectoria.

   b) Encuentre la velocidad $v(t)$ y la aceleración $a(t)$ de la partícula. Confrontando con el ej anterior interprete físicamente la constante a. Muestre que $v \to c$ asintóticamente.

[1] Nótese que estos son un conjunto de sistemas privilegiados, en general distintos, para cada punto de la trayectoria de la partícula.

c) Halle la fuerza que actúa sobre la partícula en todo instante de tiempo. Evalue la fuerza en el sistema de reposo instantáneo para cada instante de tiempo y muestre que la misma es constante en el tiempo.

d) Encuentre la relación entre F, m, a

e) Resuelva el problema de una partícula cargada en un campo eléctrico constante y compare con los items anteriores.

Ayuda: la solución de $\ddot{x} = \frac{q}{m} F \dot{x}$ es simplemente $\dot{x} = e^{\frac{q}{m} F \tau} \dot{x}_0$. Considerar un sistema de referencia adecuado de manera que F adopte una forma simple.

7. Trayectorias, Acción e invarianza de reparametrizaciones: Considerar la acción para una partícula relativista dada por

$$S_0 = -m \int d\lambda \sqrt{-\dot{x}^2}, \qquad \dot{x}^2 = \eta_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \tag{4}$$

donde $\dot{x}^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$ con $\mu = 0, .., 3$ y $\eta_{\mu\nu} = diag(-+++)$.

a) Hallar el los momentos $p_\mu = \frac{dL}{d\dot{x}^\mu}$ y mostrar que

$$p^2 + m^2 = 0. \tag{5}$$

Este vínculo se denomina vínculo de capa de masa (mass shell constraint). Mostrar que el vínculo se preserva en el tiempo $\frac{d}{d\lambda}(p^2 + m^2) = 0$.

b) Construir el Hamiltoniano $H_{can} = p_\mu \dot{x}^\mu - L$ y mostrar que es identicamente nulo

$$H_{can} = 0.$$

El origen de estas propiedades es la invarianza de reparametrizaciones $\lambda \to \lambda' = \lambda'(\lambda)$ de la acción. Es el vínculo quien gobierna la dinámica del sistema. Asimismo, la invarianza de reparametrizaciones indica que el conjunto (x^μ, p_μ) $\forall \mu$ contiene coordenadas redundantes en el espacio de las fases. Es evidente que podemos eliminar alguna de ellas mediante una elección de gauge, por ejemplo $\lambda = x^0 = t$ de esta forma el parámetro a lo largo de la línea de mundo coincide con el tiempo coordenado en un dado sistema de referencia. El vínculo (5) permite eliminar uno de los momentos p y el sistema resulta de 3 g.l. y sus respectivos momentos.

c) Incorporar el vínculo al hamiltoniano mediante un multiplicador de Lagrange e. El principio variacional hamiltoniano se deriva de

$$I[x, p, e] = \int d\lambda \left[p \cdot \dot{x} - e(p^2 + m^2) \right]$$

Eliminando p usando su ecuación de movimiento obtener la acción maestra[2]

$$S[x, e] = \frac{1}{2} \int d\lambda \left[e^{-1} \dot{x}^2 - e m^2 \right] \tag{6}$$

d) Eliminando e mediante su ecuación de movimiento recuperar (4).

[2] Lema de eliminación: cuándo es lícito resolver una ecuación de movimiento, sustituir el resultado en la acción, variar respecto de las variables restantes y obtener las ecuaciones de movimiento restantes? Cuando la ecuación de movimiento que resolvimos es algebráica.

Dem: consideremos una acción $I[\psi, \phi]$ dependiendo de dos variables ψ y ϕ de manera que la ecuación $\frac{\delta I}{\delta \phi} = 0$ puede ser resuelta algebráicamente para ϕ en términos de ψ, esto es $\phi = \phi(\psi)$. Luego

$$\left. \frac{\delta I}{\delta \phi} \right|_{\phi = \phi(\psi)} = 0$$

Las ecuaciones restantes para ψ son equivalentes a las obtenidas a partir de $\hat{I}[\psi] = I[\psi, \phi(\psi)]$, esto es, la acción donde reinsertamos la solución. Esto se deriva usando la regla de la cadena

$$\frac{\delta \hat{I}}{\delta \psi} = \left. \frac{\delta I}{\delta \psi} \right|_{\phi = \phi(\psi)} + \frac{\delta \phi(\psi)}{\delta \psi} \left. \frac{\delta I}{\delta \phi} \right|_{\phi = \phi(\psi)} = \left. \frac{\delta I}{\delta \psi} \right|_{\phi = \phi(\psi)}$$

Moral: si una de las ecuaciones es algebráica para una de las variables, es lícito resolverla y sustituir el resultado en la acción original. De esta manera, la acción resultante conduce a las mismas ecuaciones de movimiento que la acción original.

8. Acción con parametrización de tiempo propio: Mostrar que si deseamos las ecuaciones de movimiento en parametrización con tiempo/longitud propia, podemos emplear la acción cuadrática en velocidades dada por

$$S_1[x] = \frac{1}{2}\int d\tau \left(\eta_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu - m^2\right)$$

Esta acción se obtiene de fijar el gauge $e = 1$ en la acción maestra (6).

i. Si bien este Lagrangiano no es invariante de parametrizaciones argumentar que sus puntos críticos coinciden con los de (4).

ii. Construir el Hamiltoniano y mostrar que se conserva en el tiempo. El signo del mismo determina si la geodesica es tipo: tiempo/espacio/nula. Concluir entonces que el presente lagrangiano generaliza la idea de geodésica al caso de trayectorias nulas.

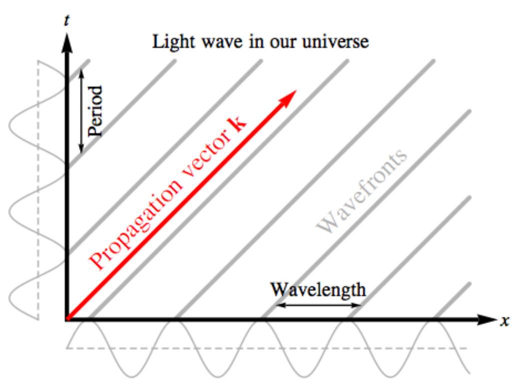
9. Ondas electromagnéticas en el espaciotiempo e Invarianza de Lorentz: A partir de las relaciones entre $(E, \mathbf{p})$ entre sistemas de referencia inerciales en movimiento relativo segun x

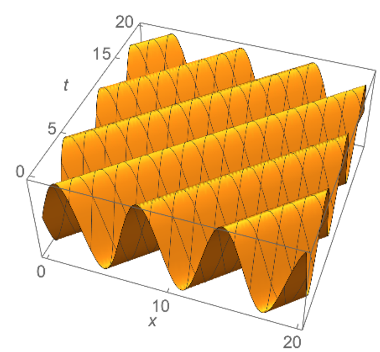
$$p'_x = \gamma\left(p_x - \beta\frac{E}{c}\right)$$
$$\frac{E'}{c} = \gamma\left(\frac{E}{c} - \beta p_x\right)$$

y las transformaciones de Lorentz para las coordenadas entre sistemas S y S', mostrar que la fase de una onda electromagnética monocromática satisface

$$\phi = \omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x} = \omega'\mathbf{t}' - \mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}'\,.$$

Esto es, es invariante de Lorentz.





Las rectas grises en la figura de la izquierda corresponden a la posición de los máximos de $\sin\phi$ en el espaciotiempo, esto es $\phi = (2n+1)\frac{\pi}{2}$. En la figura de la derecha se observan los picos en la amplitud de la onda.

Este resultado manifiesta el hecho de que la posición de la cresta de una ola (su máximo) es un objeto bien definido en el espacio-tiempo que es independiente del marco de referencia.

—

Problemas adicionales:

10. Causalidad y Simultaneidad: Si dos eventos se encuentran separados por un intervalo tipo espacio, muestre que:

a) Existe un observador inercial para el cual dichos eventos son simultáneos.

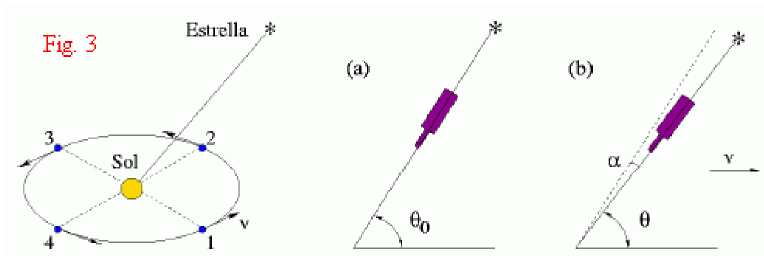
b) No existe un observador inercial para el cual ambos eventos ocurren en el mismo punto.

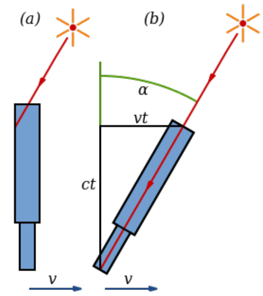
c) ¿Qué ocurre si los eventos se encontraran separados por un intervalo tipo tiempo?

11. Composición de velocidades: siendo $c = 1$, muestre que si $|u|, |v| < 1$ entonces $\left|\dfrac{u+v}{1+uv}\right| < 1$.

    Considerar ahora la composición de $|u| = 1$ y $|v| < 1$.

12. Oscilación en la aberración de la luz de estrellas distantes $\Rightarrow$ ausencia de arrastre de eter:





    La aberración de la luz es la diferencia entre la posición observada de un objeto y su posición real, debida a la velocidad del observador. Para velocidades no relativistas[3], la ley de adición de velocidades de Galileo resulta en un ángulo de incidencia aparente para la luz de una estrella lejana incidiendo verticalmente de $\tan\alpha = v/c$ (esto fue observado por primera vez por James Bradley en 1725). Muestre que el resultado relativista es $\sin\alpha = v/c$ y estime el orden de magnitud de las correcciones correspondientes.

13. Siendo $\mathbf{\Lambda}_B(\mathbf{v})$ la transformación de Lorentz asociada al boost con velocidad $\mathbf{v}$, mostrar que

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Lambda}_B(\mathbf{v}_1)\cdot\mathbf{\Lambda}_B(\mathbf{v}_2)\cdot\mathbf{\Lambda}_B(-\mathbf{v}_1)\cdot\mathbf{\Lambda}_B(-\mathbf{v}_2)$$

    con $\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2 = 0$ es una rotación. Asumir $v_1, v_2 \ll 1$. Cuál es el eje de rotación? y el ángulo?

14. Aceleración propia en Mink$_d$: generalizar la ecuación (3) hallando

$$a^\mu = (\gamma_{\boldsymbol{v}})^2\,\left((\gamma_{\boldsymbol{v}})^2\,\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} + (\gamma_{\boldsymbol{v}})^2(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{v}\right)$$

    siendo $\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{x}}{dt}$ y $\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$ y obtener

$$|\boldsymbol{a}| = \frac{1}{(\gamma_{\boldsymbol{v}})^2\sqrt{1+(\gamma_{\boldsymbol{v}})^2\boldsymbol{v}^2\cos\theta}}\alpha$$

    siendo α el módulo de la aceleración propia y θ el ángulo entre los vectores velocidad y aceleración. Bajo qué condiciones vale la fórmula (3)?

15. Adición de velocidades y parámetro de velocidad: La ley de adición de velocidades de Einstein toma una forma simple en términos del parámetro de velocidad:

    a) Mostrar que si $v = \tanh\theta$ y $u = \tanh\theta'$, luego

$$\frac{u+v}{1+uv} = \tanh(\theta+\theta'),$$

    es decir, la composición de velocidades se reduce a la adición de los parámetros de velocidad. ¿Cómo podría haberse visto esto en el marco del ejercicio 2 (cf. item c)?

    b) Un objeto se mueve con velocidad v_1 con respecto a $\mathcal{O}_1$, que se mueve con velocidad v_2 respecto de $\mathcal{O}_2$, que se mueve con velocidad v_3 respecto a $\mathcal{O}_3$ hasta que finalmente $\mathcal{O}_{N-1}$ se mueve con velocidad v_N con respecto a $\mathcal{O}_N$, donde todas las velocidades tienen la misma dirección. Muestre que la velocidad $v_{(N)}$ del objeto con respecto a $\mathcal{O}_N$ puede escribirse como:

$$v_{(N)} = \frac{P_N^+ - P_N^-}{P_N^+ + P_N^-},$$

    donde

$$P_N^\pm = \prod_{i=1}^{N}(1 \pm v_i)$$

[3]La velocidad orbital de la tierra alrededor del sol es de 30 km/s.