

Fluidos, Termodinámica et cetera¹

Guillermo A Silva

Departamento de Física, UNLP

—
Fluido: la propiedad elemental que distingue un fluido de un sólido es que un fluido no puede mantener un esfuerzo de corte indefinidamente. Si aplicamos un esfuerzo de corte, el fluido se moverá bajo la acción del corte. Los líquidos espesos como la miel se mueven menos que los fluidos como el agua o el aire. La viscosidad mide la facilidad de movimiento del fluido frente a efectos de corte.

—
No relativistas: la dinámica de un fluido ideal o perfecto se describe en términos de campos de densidad $\rho(\mathbf{x}, t)$, presión $p(\mathbf{x}, t)$ y velocidad $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$. Las ecuaciones de movimiento del fluido son

$$\text{Ecuación de Euler fluido libre : } \underbrace{\rho [\dot{\mathbf{v}} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}]}_{\text{aceleración local}} = - \underbrace{\nabla p}_{\text{fuerza de presión}} \quad (1)$$

suplementadas por la ecuación de continuidad

$$\text{Conservación de masa : } \dot{\rho} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (2)$$

La ecuación de Euler es simplemente la ecuación $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ para un elemento del fluido. La ecuación restante es la ecuación de estado del fluido

$$\text{Ecuación de estado del fluido : } p = p(\rho)$$

Las ecuaciones diferenciales (1) y (2) se resuelven dando condiciones iniciales apropiadas y condiciones de contorno.

—
Caveat: postular una ecuación de estado es equivalente a asumir que el fluido está localmente en equilibrio termodinámico, esta es una hipótesis muy fuerte en algunas situaciones de interés!

—
Derivada material: la aceleración en el lado izquierdo de (1) no es $\partial_t \mathbf{v}$ que mide el cambio de velocidad en un dado punto \mathbf{r} , sino la derivada material $D_t \mathbf{v} \equiv (\partial_t + \mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$ que sigue al elemento de fluido en su movimiento (a.k.a. descripción Euleriana).

Recordemos por qué esto es así considerando un elemento de fluido en la posición \mathbf{x} a tiempo t :

v1: sean \mathbf{x} y $\mathbf{x} + d\mathbf{x}$ las posiciones del elemento de fluido a tiempos t y $t + dt$. Por definición, la velocidad del elemento de fluido a tiempos t y $t + dt$ es igual al valor del campo de velocidades a esos tiempos evaluados en la posición del elemento de fluido, *i.e.* $\mathbf{v}(t, \mathbf{x})$ y $\mathbf{v}(t + dt, \mathbf{x} + d\mathbf{x})$. Para intervalos de tiempo pequeños el desplazamiento del elemento de fluido entre los instantes t y $t + dt$ se relaciona con la velocidad a tiempo t como $d\mathbf{x} = \mathbf{v}(t, \mathbf{x})dt$. El cambio en la velocidad del elemento de fluido en el intervalo dt resulta entonces

$$d\mathbf{v} \equiv \mathbf{v}(t + dt, \mathbf{x} + d\mathbf{x}) - \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{v}(t, \mathbf{x})}{\partial t} dt + (d\mathbf{x} \cdot \nabla) \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \rightsquigarrow \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{v}(t, \mathbf{x})}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}(t, \mathbf{x})$$

v2: la masa total del elemento de fluido solo puede cambiar si existe un flujo de la misma a través de su superficie. Esto es lo que describe la ecuación de continuidad

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$$

¹version: 2020/11/12

Asimismo en ausencia de fuerzas, el momento total en el volumen solo puede cambiar si existe un flujo del mismo a través de la superficie

$$\partial_t(\rho v_i) + \nabla_j(\rho v_i v_j) = 0$$

Expandiendo esta última expresión tenemos

$$\begin{aligned} \partial_t(\rho v_i) + \nabla_j(\rho v_i v_j) &= \rho[\partial_t + v_j \nabla_j]v_i + v_i \underbrace{[\partial_t \rho + \nabla_j(\rho v_j)]}_{=0} \\ &= \rho[\partial_t + v_j \nabla_j]v_i \end{aligned}$$

en ausencia de fuerzas es entonces la derivada material de la velocidad, $D_t \mathbf{v}$, quien se anula y no $\partial_t \mathbf{v}$. Al tener en cuenta fuerzas sobre el elemento de volumen obtenemos las ecuaciones de Euler (1) y (9).

—

1. **Identidades:** Siendo $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ un campo vectorial en \mathbb{R}^3 mostrar que

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}_i = v_j \nabla_j v_i = \frac{1}{2} \nabla_i v^2 - \epsilon_{ijk} v_j \omega_k$$

donde definimos el campo de vorticidad $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}) \equiv \text{rot } \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \nabla \times \mathbf{v}(\mathbf{x})$

2. **Ecuación de Euler:**

(a) Mostrar que alternativamente podemos escribir (1) como

$$\rho \dot{\mathbf{v}} = \rho \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega} - \frac{1}{2} \rho \nabla(v^2) - \nabla p \quad (3)$$

(b) Para el caso de flujo estacionario y sin vorticidad la ecuación de Euler se reduce a

$$\frac{1}{2} \rho \nabla(v^2) + \nabla p = 0 \quad (4)$$

—

Flujo estacionario y leyes de conservación: para el caso de flujo estacionario y en ausencia de vorticidad, resulta conveniente definir el campo $h(\mathbf{x})$ a partir de

$$\nabla(\rho^{-1} h) = \frac{1}{\rho} \nabla p$$

De (4) resulta entonces

$$\text{Teorema de Bernouilli : } \frac{1}{2} \rho v^2 + h = E \quad (5)$$

donde E es una constante. Para fluidos incompresibles

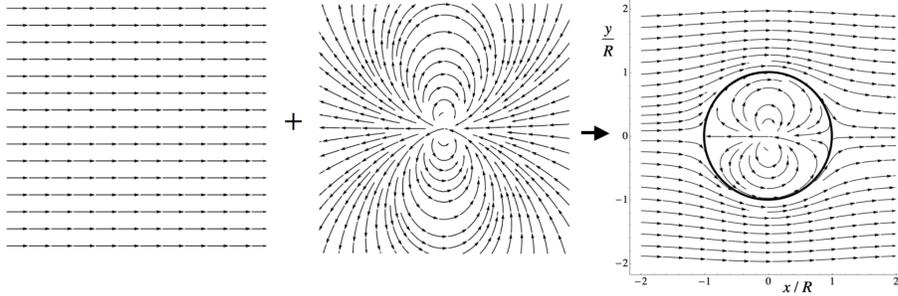
$$\text{Fluido incompresible : } \rho(\mathbf{x}, t) = \rho_0 \text{ constante} \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

tenemos que $h(\mathbf{x}) = p(\mathbf{x})$, y la ecuación (5) es nuestro viejo teorema de Bernouilli de Física I

$$\text{Fluido estacionario + incompresible + irrotacional : } \frac{1}{2} \rho v^2 + p = E$$

Puesto que la vorticidad es nula podemos escribir $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \nabla \phi(\mathbf{x})$. A $\phi(\mathbf{x})$ se lo denomina *potencial de velocidad*, la conservación de la masa (2) se reduce a $\nabla^2 \phi = 0$:

Flujos irrotacionales, incompresibles y estacionarios se caracterizan por soluciones de la ecuación de Laplace para el potencial de velocidad.



Campo de velocidades irrotacional para un fluido incompresible alrededor de una esfera.

—

3. Conservación y vorticidad: Mostrar que la conservación de la energía (5) se obtiene aún en el caso de vorticidad no nula si $\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega} = 0$. Esta última es una condición necesaria y suficiente para que el fluido pueda ser foliado localmente por 2-superficies ortogonales al flujo, esto es $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \alpha(\mathbf{x}) \nabla \beta(\mathbf{x})$, con $\alpha(\mathbf{x}), \beta(\mathbf{x})$ campos escalares apropiados, las ‘hojas’ de la foliación son las superficies $\beta(\mathbf{x}) = cte$.

4. Dinámica de la vorticidad: para el caso de un fluido incompresible, tomando el rotor de (3) obtener

$$\text{Teorema de Helmholtz : } \quad \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\zeta} = 0 \quad (6)$$

donde² $\boldsymbol{\zeta} = \mathcal{L}_{\mathbf{v}} \boldsymbol{\omega} = [\mathbf{v}, \boldsymbol{\omega}]$.

5. Conservación de momento: definiendo el tensor de esfuerzos del fluido como

$$T_{ij}(\mathbf{x}, t) \equiv p(\mathbf{x}, t) \delta_{ij} + \rho(\mathbf{x}, t) v_i v_j \quad (7)$$

mostrar que la ecuación de Euler (1) puede ser expresada como

$$\text{Ecuación de Euler } \leftrightarrow \quad \partial_t(\rho v_i) + \nabla_j T_{ji} = 0 \quad (8)$$

la cual corresponde para cada valor de i a ley de conservación del momento del fluido.

6. Fluidos no viscosos (inviscid fluid)³: Mostrar que la ecuación (6) derivada para fluidos incompresibles, también es válida para fluidos no viscosos donde ρ puede ser expresada como función de p .

—

Fluidos ideales en campos externos: en presencia de un campo externos, debemos agregar un término de fuerza en el lado derecho de (1)

$$\text{Ecuación de Euler en campo externo : } \quad \rho[\dot{\mathbf{v}} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}] = -\nabla p + \rho \mathbf{f} . \quad (9)$$

²El corchete de Lie explícitamente toma la forma $\zeta_i = v_j \nabla_j \omega_i - \omega_j \nabla_j v_i$

³Se denomina ‘Inviscid flow’ al flujo de un fluido de viscosidad igual a cero (superfluido).

Para una fuerza conservativa $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = -\nabla\Phi(\mathbf{x}, t)$. Los fluidos que satisfacen la ecuación de Euler, sin términos disipativos, se dicen *ideales*. En presencia de fuerzas viscosas decimos que el fluido es Newtoniano ver (11).

7. Bernouilli II: considerando el campo gravitatorio contante $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}$ y flujo estacionario sin vorticidad en (9), obtener el teorema de Bernouilli de Física I

$$\frac{1}{2}\rho\mathbf{v}^2 + p + \rho gy = cte.$$

8. Fluidos auto-gravitantes:

(a) Mostrar que en presencia de un potencial gravitatorio no uniforme $\Phi(\mathbf{x})$, la ecuación de Euler (9) toma la forma

$$\partial_t(\rho v_i) + \nabla_j T_{ji} = -\rho \nabla_i \Phi \quad (10)$$

donde T_{ij} esta dado por (7). Para el caso de fluidos auto-gravitantes, el potencial Φ está dado por la ecuación de Newton-Poisson

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G_N \rho$$

(b) Mostrar que podemos incorporar el lado derecho de (10) en el izquierdo, definiendo un tensor de tensiones de gravitatorio τ_{ij} de manera que

$$\partial_t(\rho v_i) + \nabla_j (T_{ji} + \tau_{ji}) = 0$$

con

$$4\pi G_N \tau_{ij} = \nabla_i \Phi \nabla_j \Phi - \frac{1}{2} \delta_{ij} (\nabla \Phi)^2$$

Ecuación que expresa la conservación del momento del fluido al moverse en un campo gravitatorio.

9. Fluidos viscosos (Newtonianos): en presencia de efectos viscosos la ecuación de Euler se modifica incorporando los coeficientes de transporte η, ζ (independientes de \mathbf{v})⁴

$$\text{Navier-Stokes : } \rho[\dot{\mathbf{v}} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}] = -\nabla p + \underbrace{\eta \nabla^2 \mathbf{v} + \left(\zeta + \frac{\eta}{3}\right) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v})}_{\text{fuerzas viscosas}} \quad (11)$$

donde η es la viscosidad dinámica (shear viscosity) y ζ la viscosidad de volumen (bulk viscosity). Fluidos con términos disipativos se dicen Newtonianos⁵.

(a) Para fluidos incompresibles, mostrar que la ecuación de Helmholtz (6) toma la forma de una ecuación de difusión

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} + \zeta - \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega} = 0$$

⁴La solución de la ecuación de Navier-Stokes para un fluido incompresible $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ es uno de los problemas del milenio del Clay Mathematical Institute.

⁵Para el caso de $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ y en ausencia de fuerzas de volumen, la ecuación de Navier Stokes se reduce a

$$\rho[\dot{\mathbf{v}} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}] = -\nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{v}$$

Adimensionalizando la ecuación por los valores típicos de longitud, velocidad y presión $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}/\ell_c$, $\mathbf{v}^* = \mathbf{v}/v_c$,

donde $\nu = \eta/\rho$ se denomina viscosidad cinemática.

(c) Mostrar que las ecuaciones de un fluido viscoso (11) nuevamente pueden ser expresadas en la forma

$$\partial_t(\rho v_i) + \nabla_j T_{ji} = 0$$

si definimos

$$T_{ij} = p \delta_{ij} + \rho v_i v_j + \pi_{ij} \quad (12)$$

donde

$$\pi_{ij} = -2\eta \underbrace{\left[\nabla_{(i} v_{j)} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \nabla_k v_k \right]}_{\text{simetrico} + \text{traza nula}} - \zeta (\nabla_k v_k) \delta_{ij}$$

La hidrodinámica se entiende como una teoría efectiva. Al incorporar correcciones en derivadas de la velocidad introducimos los distintos coeficientes de transporte. Las correcciones en $\partial^2 \mathbf{v}$, $\partial^3 \mathbf{v}$ dan origen a la ecuación de Burnett

10. Tensor de tensiones electromagnético: definido a partir de los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} como

$$4\pi T_{ij} = \frac{1}{2} \delta_{ij} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) - E_i E_j - B_i B_j$$

Demostrar que

$$\dot{S}_i + \nabla_i T_{ij} = 0 \quad \text{donde} \quad \mathbf{S} = \frac{1}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{B}$$

usando las ecuaciones de Maxwell en el vacío. Justificar que esta ecuación describe la conservación de momento.

Termodinámica y fluidos simples

. Variables específicas: para la descripción termodinámica de fluidos resulta conveniente definir cantidades por partícula (o *cantidades específicas*)

$$u \equiv \frac{U}{N}, \quad s \equiv \frac{S}{N}, \quad v \equiv \frac{V}{N} = \frac{1}{n}$$

De la extensividad de la entropía tenemos

$$S(U, V, N) = N S\left(\frac{U}{N}, \frac{V}{N}, 1\right) = N s(u, v)$$

$t^* = t/(\ell_c/v_c)$ y $p^* = (p - p_0)/(\rho v_c^2)$ obtenemos una ecuación adimensional

$$\frac{\partial \mathbf{v}^*}{\partial t^*} + (\mathbf{v}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{v}^* = -\nabla^* p^* + \underbrace{\frac{\eta}{\rho v_c \ell_c}}_{1/Re} \nabla^{*2} \mathbf{v}^*$$

Re es adimensional y representa la relación entre fuerzas inerciales y viscosas en un fluido: $Re = \ell_c v \rho / \eta$, donde ℓ_c es una distancia característica y η la viscosidad. Cuando las fuerzas viscosas pueden despreciarse, la ecuación de Navier-Stokes se reduce a la ecuación de Euler (1). $Re \ll 1$ será un flujo viscoso, $Re \gg 1$ da lugar a flujos ideales (inviscid).

Especificar un fluido equivale a dar $s(u, v)$, esto es, la entropía específica como función de la energía y el volumen específicos.

. Energía libre de Gibbs y relación de Gibbs-Duhem: un resultado importante de la termodinámica establece que de las tres variables intensivas T, p, μ , sólo dos son independientes, i.e. $\mu = \mu(T, p)$.

Dem: Para sistemas de 1 componente la primera ley de la termodinámica establece que

$$U(S, V, N) \quad \leftrightarrow \quad dU = TdS - pdV + \mu dN \quad (13)$$

Definiendo la energía libre de Gibbs como la transformada de Legendre en S y V resulta

$$\text{Gibbs : } G(T, p, N) \equiv U - TS + pV \quad \leftrightarrow \quad dG = -SdT + Vdp + \mu dN. \quad (14)$$

G es extensiva, puesto que T y p son variables intensivas, de la homogeneidad resulta

$$G(T, p, N) = N A(T, p) \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{G(T, p, N) = N \mu(T, p)} \quad (15)$$

donde la expresión a la derecha resulta de $\mu = \partial G / \partial N|_{T, p}$. Igualando (15) y (14) tenemos

$$\mu N = U - TS + pV \quad (16)$$

Al dividir por N obtenemos

$$\text{Relación de Euler en variables específicas : } \mu = u - Ts + pv \quad (17)$$

Esta ecuación nos permite interpretar al potencial químico como la transformada de Legendre de u respecto de s y v . Usando (13) resulta

$$\begin{aligned} \text{Gibbs-Duhem : } d(\mu N) &= d(U - TS + pV) \xrightarrow{ec.(13)} Nd\mu = -SdT + Vdp \\ &\longrightarrow \boxed{d\mu = -sdT + vdp} \end{aligned} \quad (18)$$

obteniendo que $\mu = \mu(T, p)$. Las variables específicas s, v resultan entonces expresables en términos de derivadas del potencial químico μ respecto de sus variables naturales

$$s = - \left. \frac{\partial \mu}{\partial T} \right|_p, \quad v = \left. \frac{\partial \mu}{\partial p} \right|_T$$

. 1^{ra} ley en variables específicas: en procesos cuasiestáticos solemos definir el calor como⁶

$$\delta Q \equiv TdS = T(Nds + sdN). \quad (19)$$

Por otra parte

$$dU + pdV - \mu dN = N(du + pdv) + (u + pv - \mu)dN, \quad (20)$$

⁶La razón para distinguir δQ de dQ es que si bien ambas son infinitesimales, ds es una diferencial exacta $d^2s = 0$ como forma diferencial, mientras que δQ no lo es: $d(\delta Q) \neq 0$.

En virtud de la primera ley de la termodinámica (13) podemos igualar los rhs de (19) y (20) obteniendo

$$Tds = du + pdv + \underbrace{\left(\frac{u + pv - Ts - \mu}{N} \right)}_{=0 \text{ ec. (16)}} dN \quad (21)$$

Concluimos entonces que la primera ley en términos de variables específicas resulta

$$\text{1ra ley en variables específicas : } Tds = du + pdv \Rightarrow \boxed{s = s(u, v)} \quad (22)$$

En variables específicas desaparece de la primera ley el potencial químico (dual a N). De (22) resulta

$$\frac{1}{T} = \left. \frac{\partial s}{\partial u} \right|_v, \quad \frac{p}{T} = \left. \frac{\partial s}{\partial v} \right|_u$$

. **Variables densidad:** alternativamente podemos expresar los potenciales, ecuaciones de estado,... en términos de densidades

$$\rho \equiv \frac{U}{V} = nu, \quad \sigma \equiv \frac{S}{V} = ns, \quad n \equiv \frac{N}{V} = \frac{1}{v}$$

. **1^{ra} ley en términos de densidades:** expresando la entropía específica como función de densidades $s = s\left(\frac{\rho}{n}, \frac{1}{n}\right) = \tilde{s}(\rho, n)$ tenemos⁷

$$Td\tilde{s} = d\left(\frac{\rho}{n}\right) + pd\left(\frac{1}{n}\right) \rightarrow nTd\tilde{s} = d\rho - \frac{\rho + p}{n}dn \quad (23)$$

Multiplicando (17) por n , resulta

$$\text{Relación de Euler en variables densidad : } \mu n + T\sigma = \rho + p \quad (24)$$

De la segunda línea de (18) tenemos que $p = p(T, \mu)$ donde

$$dp = \sigma dT + n d\mu \quad (25)$$

De esta manera expresamos la relación de Gibbs-Duhem considerando a la temperatura y el potencial químico como variables independientes. En esta representación, las densidades se escriben como

$$\sigma = \left. \frac{\partial p}{\partial T} \right|_{\mu}, \quad n = \left. \frac{\partial p}{\partial \mu} \right|_T$$

La primera ley de la termodinámica en términos de densidades se encuentra diferenciando (24) y usando (25), obtenemos

$$\text{1ra ley en variables densidad : } d\rho = Td\sigma + \mu dn \Rightarrow \boxed{\rho = \rho(\sigma, n)} \quad (26)$$

⁷Alternativamente (23) se suele escribir como

$$nTd\tilde{s} = d\rho - h dn$$

donde $h = u + pv$ es la entalpía específica del fluido.

En variables densidad desaparece de la primera ley toda referencia a la presión (dual a V). De esta última expresión resulta

$$T = \left. \frac{\partial \rho}{\partial \sigma} \right|_n, \quad \mu = \left. \frac{\partial \rho}{\partial n} \right|_\sigma$$

Moral de la historia: la ecuación de estado de un sistema se puede expresar de diferentes maneras dependiendo de la elección de los parámetros: específicos, densidades,...

. Potencial gran canónico Ω : A partir de la representación de energía $\rho(\sigma, n)$ podemos definir, mediante transformadas de Legendre, otros potenciales, asociados a una elección distinta de variables. El potencial extensivo gran canónico se define como

$$\text{Lè Grand canonique : } \Omega(T, \mu, V) = U - TS - \mu N \quad \leftrightarrow \quad d\Omega = -SdT - pdV - Nd\mu. \quad (27)$$

Puesto que solo V es extensiva, por procedimientos similares a (14)-(15) concluimos

$$\Omega(T, \mu, V) = -V p(T, \mu)$$

Así como μ se corresponde con el potencial de Gibbs (17), la presión resulta ser el potencial gran canónico ω ya que

$$\omega \equiv \underbrace{\rho - T\sigma - \mu n}_{=-p \text{ ec. (24)}} \Rightarrow \omega = -p$$

. Energía libre de Helmholtz F : se define

$$\text{Helmholtz : } F(T, V, N) = U - TS \quad \leftrightarrow \quad dF = -SdT - pdV + \mu dN. \quad (28)$$

Definiendo $f \equiv \rho - T\sigma$ de (26) resulta $df = \mu dn - \sigma dT$. Luego

$$F(T, V, N) = V f(T, n)$$

—
Hidrodinámica relativista en espacio de Minkowski: la dinámica de un fluido *relativista* se describe en términos de campos densidad de energía *propia* $\rho(x^\mu)$, presión $p(x^\mu)$ y de velocidades $\mathbf{U}(x^\mu)$, este último es tipo tiempo y está normalizado $\mathbf{U} \cdot \mathbf{U} = -1$.

El tensor energía impulso de un fluido perfecto relativista toma la forma⁸ ($c = 1$)

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)U_\mu U_\nu + \eta_{\mu\nu} p \quad (29)$$

Las cantidades $\rho(x), p(x)$ tienen significado intrínseco en el sistema de reposo instantáneo donde la velocidad del fluido es $\tilde{U}^\mu(x) = (1, \mathbf{0})$. En dicho sistema las componentes de $\tilde{T}_{\mu\nu}$ resultan

$$\begin{aligned} \tilde{T}^{00} &= \rho \\ \tilde{T}^{ij} &= p \delta_{ij} \\ \tilde{T}^{0i} &= 0 \end{aligned}$$

⁸Un fluido es perfecto cuando no presenta conducción de calor (cf. (36)) ni términos de viscosidad (cf. (11)). Como veremos mas abajo, la entropía específica es constante a lo largo de las trayectorias de cualquier elemento del fluido (cf. ej. 11). La aproximación es válida cuando el camino libre medio entre colisiones es mucho menor que las escalas características del observador. El aire actúa como un fluido perfecto para ondas de sonido cuando la longitud de onda es grande respecto del camino libre medio, a longitudes de onda pequeñas los efectos de viscosidad son relevantes.

Alternativamente, un fluido perfecto se define como aquel que tiene velocidad $\mathbf{U}(x)$ en cada punto x del espaciotiempo, de manera que un observador que se mueve con esta velocidad (comoving) ve un fluido isotrópico a su alrededor. Las coordenadas comoving \tilde{x}^μ y las coordenadas de laboratorio x^μ se relacionan por $x^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu(\mathbf{v})\tilde{x}^\nu$, luego en el sistema de laboratorio

$$T^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\alpha(\mathbf{v})\Lambda^\nu{}_\beta(\mathbf{v})\tilde{T}^{\alpha\beta}$$

que explícitamente toma la forma

$$\begin{aligned} T^{00} &= \frac{(\rho + p\mathbf{v}^2)}{1 - \mathbf{v}^2} \\ T^{ij} &= p\delta_{ij} + (p + \rho)\frac{v_i v_j}{1 - \mathbf{v}^2} \\ T^{0i} &= (p + \rho)\frac{v_i}{1 - \mathbf{v}^2} \end{aligned} \quad (30)$$

Aquí usamos $\gamma \equiv (1 - \mathbf{v}^2)^{-1/2}$ y

$$\Lambda^0{}_0(\mathbf{v}) = \gamma, \quad \Lambda^i{}_0(\mathbf{v}) = \gamma v_i, \quad \Lambda^i{}_j(\mathbf{v}) = \delta_{ij} + v_i v_j \frac{(\gamma - 1)}{\mathbf{v}^2}, \quad \Lambda^0{}_j(\mathbf{v}) = \gamma v_j$$

Teniendo en cuenta que en el sistema de laboratorio $U^\mu = \gamma(1, \mathbf{v})$ las expresiones (30) se expresan de manera covariante como (29).

Las ecuaciones de movimiento de un fluido relativista en ausencia de fuerzas externas son

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0 \quad (31)$$

(29) y (31) generalizan (7)-(8). Luego, la conservación de $T_{\mu\nu}$ es equivalente a las ecuaciones de movimiento para el fluido (ver ej. 10). Por completitud, las componentes temporales y espaciales resultan

$$\begin{aligned} \partial_t \left(\frac{(\rho + p\mathbf{v}^2)}{1 - \mathbf{v}^2} \right) + \nabla_i \left((p + \rho)\frac{v_i}{1 - \mathbf{v}^2} \right) &= 0 \\ \partial_t \left((p + \rho)\frac{v_i}{1 - \mathbf{v}^2} \right) + \nabla_i \left(p\delta_{ij} + (p + \rho)\frac{v_i v_j}{1 - \mathbf{v}^2} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (32)$$

Número de partículas: además de energía y momento un fluido conservará otras cargas: carga eléctrica, número bariónico y, a temperaturas normales, el número de átomos. Consideremos el caso de un fluido simple, esto es, compuesto por partículas de un mismo tipo con densidad de número de partículas $n(x^\mu)$: n puede representar el número de átomos de hidrógeno por *unidad de volumen propio*⁹ o el número de bariones menos el número de antibariones en el punto x^μ (conservación del número bariónico). La conservación del número de partículas se expresa mediante el vector corriente de partículas $N^\mu(x) = n(x)U^\mu(x)$ como

$$\nabla_\mu N^\mu = 0 \quad (33)$$

| | | | | |
|--|---|--|-------------------|--|
| Fluido perfecto/ideal no disipativo | : | Sin esfuerzos de corte (fricción) Ausencia de conducción de calor | \Leftrightarrow | fluido localmente isotrópico para observador comoving |
|--|---|--|-------------------|--|

⁹Esto es, el número de átomos por unidad de volumen en el sistema de referencia donde el fluido se encuentra en reposo.

Resumen: tenemos $4 + 1 = 5$ ecuaciones ($\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0$, $U^2 = -1$) y $4 + 2 = 6$ incógnitas (U, ρ, p), la ecuación restante que define el problema unívocamente es la ecuación de estado del fluido. Sin embargo, la ecuación de estado depende de dos variables: $\rho(s, n)$ (ver (26)), de manera que necesitamos una ecuación adicional para la dinámica de n . En el caso de fluidos perfectos dicha ecuación es (33) y conduce como veremos a continuación a que el fluido resulte isoentrópico (ver (36)). Puesto que para fluidos perfectos la entropía específica constante a lo largo del flujo, resulta que $\rho = \rho(n)$. Esta última ecuación la solemos expresar como $p(\rho)$.

10. Continuidad y Euler relativistas:

(a) Descomponiendo (31) en la dirección transversal a U obtener

$$\text{Euler relativista} \leftrightarrow (\rho + p)U^\rho \nabla_\rho U^\mu = - \underbrace{(\eta^{\mu\nu} + U^\mu U^\nu)}_{\Pi^{\mu\nu}} \nabla_\nu p \quad (34)$$

donde $\Pi^{\mu\nu}$ es el proyector al hiperplano ortogonal a U . La proyección de (31) en componente longitudinal a U da origen a la ecuación de continuidad relativista

$$U^\mu \nabla_\mu \rho + (\rho + p) \nabla_\mu U^\mu = 0 \quad \leftrightarrow \quad \nabla_\mu (\rho U^\mu) = -p \nabla_\mu U^\mu \quad (35)$$

(b) Reintroducir c y mostrar que el límite no relativista de (34) y (35) conducen a (1) y (2).

(c) Para el caso de polvo concluir que la velocidad del fluido sigue geodésicas: $U^\mu \nabla_\mu U_\nu = 0$.

11. Fluido perfecto es isoentrópico:

(a) A partir de la conservación del número de partículas (33), mostrar que la ecuación de continuidad (35) se puede escribir como

$$U^\nu \left(\nabla_\nu \left(\frac{\rho}{n} \right) + p \nabla_\nu \left(\frac{1}{n} \right) \right) = 0 \quad \xrightarrow{U^\nu \nabla_\nu = \frac{d}{d\tau}} \quad \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\rho}{n} \right) + p \frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{n} \right) = 0 \quad \rightarrow \quad T \frac{ds}{d\tau} = 0 \quad (36)$$

Comparando con el lado izquierdo de (23) concluimos que la entropía específica se conserva a lo largo del flujo. En otras palabras, dado que $Tds = \delta q$ la evolución es localmente adiabática, la entropía por partícula no cambia a lo largo de la evolución. Una de las razones de la conservación de s a lo largo de las trayectorias de un fluido perfecto es que no existen fuerzas viscosas.

(b) Mostrar que para flujos isoentrópicos $s = cte$. las ecuaciones de Euler relativistas (34) para un fluido simple se reducen a

$$U^\rho \nabla_\rho U^\mu = -\Pi^{\mu\nu} \nabla_\nu (\ln h)$$

donde h es la entalpía específica.

12. Ecuaciones de estado y fluidos baritrópicos:

(a) A partir de la ecuación de estado $\tilde{s}(\rho, n)$ mostrar, usando (23), que la presión y la temperatura del sistema se expresan como

$$p(\rho, n) = -\rho - n \frac{\tilde{s}_n}{\tilde{s}_\rho}, \quad T(\rho, n) = \frac{1}{n \tilde{s}_\rho}$$

donde $\tilde{s}_\rho = \partial\tilde{s}/\partial\rho$ y $\tilde{s}_n = \partial\tilde{s}/\partial n$

(b) Mostrar que la presión dependerá sólo de la densidad de energía ρ sii $s(\rho, n) = q(x)$ donde $x = \rho g(\rho)/n$ con $g(\rho)$ una función arbitraria.

(c) Se denominan fluidos baritrópicos a los fluidos donde la presión sólo depende de la densidad de energía: $p = p(\rho)$. Cuando el número de partículas se conserva, la entropía resulta una función de la energía interna y el volumen $S = S(U, V)$. De la 1ra ley tenemos $TdS = dU + pdV$ de manera que

$$T = \left(\frac{\partial S}{\partial U} \right)_V^{-1}, \quad p = T \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_U$$

(i) Mostrar que

$$p = w\rho = wU/V \Rightarrow V\partial_V S = wU\partial_U S \Rightarrow S = S(V^w U)$$

(ii) Verificar esta última afirmación para el caso de radiación electromagnética.

Ayuda: usar para un gas de fotones $S \sim U/T$ (ver wikipedia) y la ley de Stefan-Boltzmann $\rho \sim T^4$

13. Corriente de entropía: definiendo la corriente de entropía como $\sigma^\mu = \sigma U^\mu$ mostrar que podemos escribir el tensor de energía impulso de un fluido perfecto como

$$T_{\mu\nu} = (T\sigma_\mu + \mu n_\mu)U_\nu + p\eta_{\mu\nu}$$

y que la ley de conservación implica

$$T\nabla^\alpha\sigma_\alpha + \mu\nabla^\alpha n_\alpha = 0$$

Esta ecuación nos dice que, en presencia de potencial químico no nulo, la no conservación del número de partículas implica una variación de la corriente de entropía. Si el número de partículas se conserva (o si μ es despreciable), la corriente de entropía también es conservada y podemos escribir $\nabla^\alpha\sigma_\alpha = U^\alpha\nabla_\alpha\sigma + \sigma\theta$ donde $\theta = \nabla \cdot \mathbf{U}$ se denomina parámetro de expansión. Dado que una fórmula análoga vale para \mathbf{n} mostrar que la entropía por partícula $s = \sigma/n$ se conserva a lo largo del flujo

$$\frac{d}{d\tau}s = U^\alpha\nabla_\alpha s = 0$$

Presión de un fluido isoentrópico: en situaciones donde la entropía específica es constante de (23) tenemos que $\rho = \rho(n)$,

$$d\rho = \frac{\rho + p}{n}dn \rightarrow p = n\frac{d\rho}{dn} - \rho \quad (37)$$

Luego, la presión es el opuesto de la transformada de Legendre de de la densidad de energía. Para polvo $p = 0$ y radiación $p = \rho/3$ resulta

$$\frac{d\rho}{dn} = \frac{\rho + p}{n} \Rightarrow \text{Polvo : } \rho_{polvo}(n) \sim n, \quad \text{Radiación : } \rho_{rad}(n) \sim n^{4/3} \quad (38)$$

Para relaciones lineales $p = \eta\rho$ se obtiene

$$\rho(n) = \alpha n^{1+\eta} \rightarrow p = n\rho' - \rho = \eta\alpha n^{1+\eta}$$

Nota: el caso $\rho = -p$ es muy particular pues tanto ρ, p son independientes de n . Luego, no es posible cambiar la densidad de energía pues no depende de ningún parámetro. Reexpresando (37) como

$$vd\rho = -(\rho + p)dv$$

vemos que en el caso $\rho = -p$ no hay cambio en la densidad de energía frente a cambios de volumen.

16. Ecuaciones de estado II:

(a) La corrección por temperatura finita, en el límite no relativista $kT \ll mc^2$, a ρ_{polvo} en (38) es proporcional a la presión

$$\rho = nm + \frac{3}{2}p$$

A partir de la relación (37) obtener

$$\rho(n) = nm + \kappa n^{5/3}, \quad p(n) = \frac{2\kappa}{3}n^{5/3} \quad (39)$$

donde $\kappa = \frac{3}{2}p_0/n_0^{5/3}$ con p_0 la presión a una densidad de referencia n_0 .

(b) Integrando la relación (25) considerando que el flujo es isoentropico y sin cambio de potencial químico, hallar la dependencia de la temperatura con n

$$T(n) \sim n^{2/3}$$

(c) Reexpresar la ecuación de estado para la presión en términos de temperatura obteniendo

$$p \sim nT \quad \leftrightarrow \quad pV \sim NT$$

Ir a los libros y verificar que los resultado son los conocidos de termodinámica clásica.

Ondas de sonido: consideremos un fluido en una situación estática: $\mathbf{v}_0 = 0$, $n = n_0$ y $p = p_0$ constantes. La condición de velocidad nula significa que la velocidad promedio para el transporte de partículas es nula, esto no quiere decir que la velocidad de las partículas individuales sea nula, las partículas pueden ser ultrarelativistas si $kT \gg mc^2$.

Analicemos pequeñas fluctuaciones alrededor de los valores de equilibrio

$$n = n_0 + \delta n, \quad \mathbf{v} = \delta \mathbf{v}$$

Naturalmente tendremos

$$\rho = \rho_0 + \delta \rho, \quad p = p_0 + \delta p$$

Dado que el fluido es isoentrópico llamando $\rho = f(n)$ resulta $\delta \rho = f'(n_0) \delta n$, y de (37) tenemos

$$\delta p = n_0 f_0'' \delta n \quad (40)$$

Linealizando (33) usando $N^\mu \simeq (n_0 + \delta n)(1, \delta \mathbf{v})$ obtenemos

$$\frac{\partial \delta n}{\partial t} + \nabla \cdot (n_0 \delta \mathbf{v}) = 0 \quad (41)$$

Para (32) resulta

$$\frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0 + p_0} \nabla(\delta p) \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{f_0''}{f_0'} \nabla(\delta n)$$

donde usamos $\rho + p = n\rho'$ (ver (37)) y (40). Derivando respecto del tiempo (41) y usando esta última ecuación concluimos¹⁰

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{n_0 f_0''}{f_0'} \nabla^2 \right) \delta n = 0 \quad \Rightarrow \quad c_s^2 = \frac{n_0 f_0''}{f_0'} = \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_0$$

De (39) resulta para gases no relativistas $c_s^2 = 5p_0/3mn_0 \ll 1$, mientras que para un gas relativista $c_s^2 = 1/3 < 1$. En ningún caso la velocidad del sonido supera la de la luz.

¹⁰De $p = n \frac{d\rho}{dn} - \rho$ resulta que $\frac{dp}{d\rho} = \underbrace{\frac{dn}{d\rho} \frac{d\rho}{dn}}_{=1} + n \frac{d}{d\rho} \left(\frac{d\rho}{dn} \right) - 1 = n \frac{d^2 \rho}{dn^2} \frac{dn}{d\rho} = n \frac{f''}{f'}$

Apéndices

Gas ideal: hallemos la energía interna de un gas ideal en variables naturales. La ecuación de estado es $pV = \mathbf{N}RT$ aquí \mathbf{N} es el número de moles, y la energía interna como función de la temperatura es $U = \mathbf{N}C_V T$. Deseamos hallar $S(U, V, \mathbf{N})$, homogeneidad en este caso nos dice que $S(U, V, N) = \mathbf{N}f\left(\frac{U}{\mathbf{N}}, \frac{V}{\mathbf{N}}\right)$, hallemos f . De la primera ley tenemos

$$\begin{aligned} dS &= \frac{1}{T}dU + \frac{p}{T}dV \\ &= \mathbf{N}C_V \frac{dT}{T} + \mathbf{N}R \frac{dV}{V} \rightsquigarrow S = \mathbf{N} \left(C_V \ln \frac{T}{T_0} + R \ln \frac{V}{V_0} \right) = \mathbf{N} \ln \left(T^{C_V} \left(\frac{V}{\mathbf{N}} \right)^R \right) + cte \end{aligned} \quad (42)$$

donde introdujimos V/\mathbf{N} para satisfacer homogeneidad. A partir de la expresión de la energía interna concluimos

$$S(U, V, N) = \mathbf{N}R \left[\ln \left(\left(\frac{U}{\mathbf{N}} \right)^{\frac{C_V}{R}} \frac{V}{\mathbf{N}} \right) + s_0 \right]$$

Podemos expresarla en términos del número de partículas usando $\mathbf{N}R = Nk$, la constante s_0 fue determinada por Seckur-Tetrode. Para un gas monoatómico $C_V = \frac{3}{2}R$ y $s_0 = \frac{3}{2} \ln \left(\frac{m}{3\pi\hbar^2} \right) + \frac{5}{2}$ ver (43).

. **Sakur-Tetrode - à la Boltzmann - mikrocanónica:** sumando microestados hallemos el valor absoluto de la entropía para un gas monoatómico. Este problema es no trivial desde el punto de vista clásico ya que debemos contar el número de configuraciones admisibles, que en principio son continuas. A tal fin Seckur y Tetrode discretizaron el espacio de las fases usando la constante de Planck como unidad de volumen $\frac{dq dp}{2\pi\hbar}$

Consideremos N partículas idénticas libres de masa m , $H = \frac{1}{2m}(\mathbf{p}_1^2 + \dots + \mathbf{p}_N^2)$, en un volumen V . Llamando W' al número de configuraciones en el espacio de las fases¹¹

$$\begin{aligned} S(E, V, N) &= k_B \ln \frac{W'(E, V)}{N!} \quad \text{donde} \quad W' = \int \prod_{i=1}^N \frac{d\mathbf{q}_i d\mathbf{p}_i}{(2\pi\hbar)^3} \delta(E - H(\mathbf{q}, \mathbf{p})) \\ &= \left(\frac{V}{2\pi\hbar^3} \right)^N \underbrace{\text{Area}_{3N}(R)}_{R^{3N-1} \text{Area}_{3N}(1)} \simeq \left(\frac{V}{2\pi\hbar^3} \right)^N R^{3N} \text{Vol}_{3N}(1) \end{aligned}$$

donde $R = \sqrt{2mE}$ y el factor $1/N!$ es necesario para resolver la paradoja de Gibbs, configuraciones relacionadas por un intercambio de partículas no deben ser consideradas como distintas. El *area* de la de la esfera de energía se aproxima en el límite termodinámico por el volumen encerrado por la esfera de energía dado que $\ln R^{3N} \sim \ln R^{3N-1}$ en el límite $N \rightarrow \infty$. Usando $\text{Vol}_n(1) = \frac{\pi^{n/2}}{(n/2)\Gamma(n/2)}$ tenemos

$$S(E, V, N) = k_B \ln \left(\frac{(2\pi m E)^{\frac{3N}{2}} V^N}{(2\pi\hbar)^{3N} \Gamma(\frac{3N}{2} + 1) N!} \right)$$

usando Stirling $\ln N! \sim N(\ln N - 1)$ resulta

$$S(E, V, N) = k_B N \left(\frac{3}{2} \ln \frac{E}{N} + \ln \frac{V}{N} + \frac{3}{2} \ln \frac{m}{3\pi\hbar^2} + \frac{5}{2} \right) \quad (43)$$

. **via función de partición - $T \neq 0$:** considerando N partículas no interactuantes tenemos

$$Z = \frac{Z_1^N}{N!}$$

donde Z_1 la función de partición de una partícula y, nuevamente, $N!$ da cuenta de la indistinguibilidad. Recordando que la función de partición $Z(\beta, V, N)$ se relaciona con la energía libre de Helmholtz como ($\beta = 1/kT$)

$$\begin{aligned} \beta F &= -\ln Z \stackrel{ec.(28)}{\rightsquigarrow} S = k\partial_T(T \ln Z) = k(\ln Z - \underbrace{\beta \partial_\beta \ln Z}_{-\langle E \rangle}) \\ &= \beta(U - F) \end{aligned} \quad (44)$$

¹¹ $\text{Area}_d(R)/\text{Vol}_d(R)$ denotan el área/volumen de la esfera de radio R en d dimensiones. Dado que $\text{Vol}_n(R) = \int_{|\mathbf{x}| \leq R} dx_1 \dots dx_n = R^n \text{Vol}_n(1)$ se sigue de $dx_1 \dots dx_n = \text{Vol}_n(1) n R^{n-1} dR$ que $\text{Area}_n(1) = n \text{Vol}_n(1)$.

la segunda línea se sigue de la definición de F como transformada de Legendre de U ec. (28), naturalmente $U = \langle E \rangle$. Usando Stirling tenemos

$$S = k(\ln Z + \beta E) = kN \left(\ln \frac{Z_1}{N} + 1 + \frac{\beta E}{N} \right) \quad (45)$$

La función de partición de una partícula esta dada por

$$Z_1 = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int_V d\mathbf{q} \int d\mathbf{p} \exp(-\beta \mathbf{p}^2/2m) = \frac{V}{\lambda^3} \quad \text{donde la longitud térmica de de Broglie } \lambda = \frac{h}{\sqrt{2\pi mkT}}$$

insertando en (45) resulta

$$S(T, V, N) = kN \left(\ln \frac{V}{\lambda^3 N} + \frac{5}{2} \right)$$

reemplazando la energía interna de un gas ideal $U = \frac{3}{2} NkT$ reobtenemos (43).

Referencias

- An Introduction to General Relativity*, L Hughston and K Tod
Gravitation, S Weinberg
100th anniversary of the Sackur-Tetrode equation, W Grimus, Ann. Phys. **525** A32 (2013).
Action functionals for relativistic perfect fluids, J David Brown, gr-qc/9304026.
Lagrangian Density for Perfect Fluids in General Relativity, J Ray, J. Math. Phys. **13** (1972) 1451.
Physical Hydrodynamics, Guyon, Hulin, Petit, Mitescu