

Fluidos, Termodinámica et cetera¹

Guillermo A Silva

Departamento de Física, UNLP

No relativistas: un fluido ideal o perfecto se describe a partir de su densidad ρ , su presión p y su velocidad \mathbf{v} , todas funciones del tiempo y el espacio. Las ecuaciones de movimiento del fluido son

$$\text{Ecuaciones de Euler : } \quad \rho[\dot{\mathbf{v}} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}] = -\nabla p \quad (1)$$

suplementadas por la ecuación de continuidad

$$\text{Conservacion de masa : } \quad \dot{\rho} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{v}) = 0 \quad (2)$$

Estas ecuaciones diferenciales se resuelven dando condiciones iniciales apropiadas, condiciones de contorno y una *ecuación de estado* que relaciona $p = p(\rho)$ que depende de las características del fluido a estudiar. Se suele definir la derivada material

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} \equiv \dot{\mathbf{v}} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$$

—

1. Identidades: Siendo \mathbf{v} un vector en \mathbb{R}^3 mostrar que

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}_i = v_j \nabla_j v_i = \frac{1}{2} \nabla_i v^2 - \epsilon_{ijk} v_j \omega_k$$

donde $\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v}$

2. Ecuación de Euler:

(a) Mostrar que (1) alternativamente toma la forma

$$\rho\dot{\mathbf{v}} = \rho\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega} - \frac{1}{2}\rho\nabla(v^2) - \nabla p \quad (3)$$

(b) Para el caso de flujo estacionario y sin vorticidad (3) se reduce a

$$\frac{1}{2}\rho\nabla(v^2) + \nabla p = 0 \quad (4)$$

—

Flujo estacionario y leyes de conservación: para el caso de flujo estacionario y en ausencia de vorticidad, de (4) resulta que definiendo una función h a partir de

$$\nabla(\rho^{-1}h) = \frac{1}{\rho}\nabla p$$

obtenemos la ley de conservación

$$\text{Teorema de Bernouilli : } \quad \frac{1}{2}\rho v^2 + h = E \quad (5)$$

donde E es una constante. Si el fluido es incompresible (ρ es constante) resulta $h = p$ y (5) expresa el teorema de Bernouilli. Puesto que la vorticidad es nula podemos escribir $\mathbf{v} = \nabla\phi$. A ϕ se lo denomina potencial de velocidades, la conservación de la masa (2) se reduce a $\nabla^2\phi = 0$:

¹version: 2019/10/03

Flujos irrotacionales, incompresibles y estacionarios se caracterizan por soluciones de la ecuación de Laplace para el potencial de velocidades.

3. Conservación y vorticidad: Mostrar que la conservación de la energía (5) se obtiene aún en el caso de vorticidad no nula si $\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega} = 0$. Esta última es una condición necesaria y suficiente para que el fluido pueda ser foliado localmente por 2-superficies ortogonales al flujo, esto es $\mathbf{v} = \alpha \nabla \beta$, con α, β escalares apropiados, las ‘hojas’ de la foliación son las superficies $\beta = cte$.

4. Dinámica de la vorticidad: para el caso de un fluido incompresible, tomando el rotor de (3) obtener

$$\text{Teorema de Hemihtotz : } \quad \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\zeta} = 0 \quad (6)$$

donde $\boldsymbol{\zeta} = \mathcal{L}_v \boldsymbol{\omega} = [\mathbf{v}, \boldsymbol{\omega}]$

5. Conservación de momento: definiendo el tensor de esfuerzos del fluido como

$$T_{ij} \equiv \rho v_i v_j + p \delta_{ij} \quad (7)$$

mostrar que la ecuación de Euler (1) puede ser expresada como

$$\text{Ecuación de Euler } \leftrightarrow \partial_t(\rho v_i) + \nabla_j T_{ji} = 0 \quad (8)$$

la cual para cada valor de i da una ley de flujo para cada una de las componente del momento del fluido.

6. Fluidos no viscosos (inviscid fluid)²: Mostrar que la ecuación (6) derivada para fluidos incompresibles, también es válida para fluidos no viscosos donde ρ puede ser expresada como función de p .

Fluidos en campos externos: en presencia de un campo externos, debemos agregar un término de fuerza en el rhs de (1)

$$\rho[\dot{\mathbf{v}} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}] = -\nabla p + \rho \mathbf{f}. \quad (10)$$

Para una fuerza conservativa $\mathbf{f} = -\nabla \Phi$.

7. Bernouilli II: considerando el campo gravitatorio $\mathbf{f} = \mathbf{g}$ y flujo estacionario sin vorticidad en (10), obtener el teorema de Bernouilli de Física 1

$$\frac{1}{2} \rho \mathbf{v}^2 + p + \rho g y = cte.$$

²Se denomina ‘*Inviscid flow*’ al flujo de un fluido de viscosidad igual a cero (superfluido). El número de Reynolds para un flujo no viscoso se acerca a infinito cuando la viscosidad se acerca a cero. Recordemos que Re es adimensional y representa la relación entre fuerzas inerciales y viscosas en un fluido: $Re = l_c v \rho / \eta$, donde l_c es una distancia característica y η la viscosidad. Cuando las fuerzas viscosas pueden despreciarse, la ecuación de Navier-Stokes

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{v} + \rho \mathbf{f} \quad (9)$$

se reduce a la ecuación de Euler (1).

8. Fluidos auto-gravitantes:

(a) Mostrar que en presencia de un potencial gravitatorio Φ , la ecuación de Euler toma la forma

$$\partial_t(\rho V_i) + \nabla_j T_{ji} = -\rho \nabla_i \Phi \quad (11)$$

donde T_{ij} esta dado por (7). Para el caso de fluidos auto-gravitantes, el potencial Φ está dado por la ecuación de Newton-Poisson

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G_N \rho$$

(b) Mostrar que podemos incorporar el lado derecho de (11) en el izquierdo, definiendo un tensor de tensiones de gravitatorio τ_{ij} de manera que

$$\partial_t(\rho v_i) + \nabla_j (T_{ji} + \tau_{ji}) = 0$$

con

$$4\pi G_N \tau_{ij} = \nabla_i \Phi \nabla_j \Phi - \frac{1}{2} \delta_{ij} (\nabla \Phi)^2$$

Ecuación que expresa la conservación del momento del fluido al moverse en un campo gravitatorio.

9. Fluidos viscosos: en presencia de efectos viscosos la ecuación de Euler se modifica como

$$\rho[\dot{\mathbf{v}} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}] = -\nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{v} + (\zeta + \frac{1}{3}\eta) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) \quad (12)$$

donde η es la viscosidad dinámica (shear viscosity) y ζ la viscosidad de volumen (bulk viscosity).

(a) Mostrar que para fluidos incompresibles ($\rho = cte.$), usando la ecuación de continuidad, (13) se reduce a la ecuación de Navier-Stokes (9).

(b) En la misma situación del item anterior mostrar que la ecuación de Helmholtz (32) toma la forma de una ecuación de difusión

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\zeta} - \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega} = 0$$

donde $\nu = \eta/\rho$ se denomina viscosidad cinemática.

(c) Mostrar que las ecuaciones de un fluido viscoso (13) pueden ser expresadas en la forma

$$\partial_t(\rho v_i) + \nabla_j T_{ji} = 0$$

donde

$$T_{ij} = \rho v_i v_j + (p - \zeta \nabla_k v_k) \delta_{ij} - 2\eta [\nabla_{(i} v_{j)} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \nabla_k v_k] \quad (13)$$

10. Tensor de tensiones electromagnético: definido a partir de los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} como

$$4\pi T_{ij} = -E_i E_j - B_i B_j = \frac{1}{2} \delta_{ij} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2)$$

Mostrar a partir de las ecuaciones de Maxwell en el vacio que

$$\dot{S}_i + \nabla_i T_{ij} = 0 \quad \text{donde } \mathbf{S} \text{ es el vector de flujo de energía: } \mathbf{S} = \frac{1}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{B}$$

Hidrodinámica relativista en espacio de Minkowski: un fluido ideal/perfecto relativista³ se caracteriza por su densidad de energía *propia* ρ , su presión p y su campo de velocidades \mathbf{u} , el cual naturalmente es tipo tiempo y normalizado $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = -1$. El tensor energía impulso ($c = 1$) se define como

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu + \eta_{\mu\nu}p \quad (14)$$

Las cantidades ρ, p tienen significado intrínseco en el sistema de reposo instantáneo donde la velocidad del fluido es $\tilde{u}^\mu = (1, \mathbf{0})$. En dicho sistema las componentes de $\tilde{T}_{\mu\nu}$ resultan

$$\begin{aligned} \tilde{T}^{00} &= \rho \\ \tilde{T}^{ij} &= p\delta_{ij} \\ \tilde{T}^{0i} &= 0 \end{aligned}$$

Alternativamente, un fluido perfecto se define como aquel que tiene velocidad \mathbf{u} en cada punto, de manera que un observador que se mueve con esta velocidad (comoving) ve un fluido isotrópico a su alrededor. Las coordenadas comoving \tilde{x}^μ y las coordenadas de laboratorio x^μ se relacionan por $x^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu(\mathbf{v})\tilde{x}^\nu$, luego en el sistema de laboratorio

$$T^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\alpha(\mathbf{v})\Lambda^\nu{}_\beta(\mathbf{v})\tilde{T}^{\alpha\beta}$$

que explícitamente toma la forma

$$\begin{aligned} \tilde{T}^{00} &= \frac{(\rho + p\mathbf{v}^2)}{1 - \mathbf{v}^2} \\ \tilde{T}^{ij} &= p\delta_{ij} + (p + \rho)\frac{v_i v_j}{1 - \mathbf{v}^2} \\ \tilde{T}^{0i} &= (p + \rho)\frac{v_i}{1 - \mathbf{v}^2} \end{aligned}$$

donde usamos $\gamma \equiv (1 - \mathbf{v}^2)^{-1/2}$ y

$$\Lambda^0{}_0(\mathbf{v}) = \gamma, \quad \Lambda^i{}_0(\mathbf{v}) = \gamma v_i, \quad \Lambda^i{}_j(\mathbf{v}) = \delta_{ij} + v_i v_j \frac{(\gamma - 1)}{\mathbf{v}^2}, \quad \Lambda^0{}_j(\mathbf{v}) = \gamma v_j$$

Las ecuaciones de movimiento de un fluido relativista en ausencia de fuerzas externas son

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0 \quad (15)$$

(14) y (15) generalizan (7)-(8). De manera que, EOM \equiv Conservación de $T_{\mu\nu}$. Ver ej. 11

Tenemos $4+1 = 5$ ecuaciones ($\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0$, $\mathbf{u}^2 = -1$) y $4+2 = 6$ incógnitas (\mathbf{u}, ρ, p), la ecuación restante corresponde a la ecuación de estado, que en el caso de fluidos isoentrópicos se expresa como una relación $p(\rho)$ (ver (34)). En casos generales donde existe disipación, *i.e.* la entropía específica no es constante a lo largo del flujo, la ecuación de estado toma la forma $\rho(s, n)$ (ver (28)).

Interpretación: Consideremos una familia de observadores inerciales con velocidades \mathbf{v} de manera que

$$\nabla_\nu v^\mu = 0 \quad (16)$$

³El fluido se dice perfecto debido a la ausencia de conducción de calor (cf. (33)) y de términos de viscosidad (cf. (13)). Como veremos mas abajo, la entropía específica es constante a lo largo de las trayectorias de cualquier elemento del fluido (cf. ej. 12)

La proyección de $T_{\mu\nu}$ a lo largo de \mathbf{v}

$$j_\mu = T_{\mu\nu}v^\nu$$

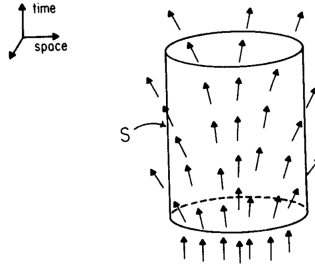
representa la densidad de corriente de masa-energía del fluido medida por los observadores \mathbf{v} . A partir de (16) y (15) resulta que la corriente es conservada

$$\nabla_\mu j^\mu = 0$$

Usando la ley de Gauss tenemos que para cualquier 4-volumen V de borde $S = \partial V$ tenemos

$$\oint_S j_\mu n^\mu dS = 0 \quad (17)$$

donde la normal \mathbf{n} es: saliente de V en superficies spacelike y entrante a V en superficies timelike. Aplicando esta identidad al 4-volumen de la figura de mas abajo vemos que el cambio de energía del fluido en el volumen V (contribuciones a la integral en las tapas arriba-abajo) iguala la integral en el tiempo del flujo de energía entrante al volumen (superficie lateral del cilindro). De manera que (17) implica conservación de energía y a la inversa, conservación de energía para todo obserbador inercial requiere (15). Mas generalmente, conservación de la energía implica que (15) debe ser satisfecha para toda distribución continua de materia, no solo para fluidos perfectos.



. Número de partículas: consideremos el caso de un fluido simple, esto es, compuesto por partículas de un mismo tipo con densidad de número de partículas $n(x^\mu)$. Por ejemplo, n puede representar el número de átomos de hidrógeno por *unidad de volumen propio* o el número de bariones menos el número de antibariones en el punto x^μ (conservación del número bariónico). La conservación del número de partículas se expresa mediante el vector corriente de partículas $n^\mu = n u^\mu$ como

$$\nabla_\mu n^\mu = 0 \quad (18)$$

—

10. Fluido tipo polvo sigue geodésicas: considerar un fluido sin presión (polvo): $T_{\mu\nu} = \rho u_\mu u_\nu$. De la conservación de $T_{\mu\nu}$ mostrar que la velocidad del fluido sigue geodésicas: $u^\mu \nabla_\mu u_\nu = 0$.

11. Continuidad y Euler relativistas:

(a) A partir de (15), descomponiendo en la dirección transversal a \mathbf{u} obtener la ecuación de Euler relativista

$$\text{Euler relativista} \leftrightarrow (\rho + p)u^\rho \nabla_\rho u^\mu = -(\eta^{\mu\nu} + u^\mu u^\nu) \nabla_\nu p \quad (19)$$

La componente longitudinal a \mathbf{u} da origen a la ecuación de continuidad relativista

$$u^\mu \nabla_\mu \rho + (\rho + p) \nabla_\mu u^\mu = 0 \quad \leftrightarrow \quad \nabla_\mu (\rho u^\mu) = -p \nabla_\mu u^\mu \quad (20)$$

(b) Reintroducir c y mostrar que en el límite no relativista se obtienen (1) y (2).

—
Termodinámica y fluidos simples: Para lo que sigue resulta conveniente definir cantidades por partícula (o *cantidades específicas*)

$$u = \frac{U}{N}, \quad s = \frac{S}{N}, \quad v = \frac{V}{N} = \frac{1}{n}$$

energía, entropía y volumen específicos respectivamente. Especificar un fluido equivale a dar $s(u, v)$ donde s es la entropía específica. De esta relación podemos determinar $T(u, v)$ y $p(u, v)$ a partir de relaciones termodinámicas (cf.(27))

$$\frac{1}{T} = \left. \frac{\partial s}{\partial u} \right|_v, \quad \frac{p}{T} = \left. \frac{\partial s}{\partial v} \right|_u$$

Energía libre de Gibbs y relación de Gibbs-Duhem: un resultado importante de la termodinámica que establece que de las tres variables intensivas T, p, μ , sólo dos son independientes, i.e. $\mu = \mu(T, p)$.

Veámoslo:

Para sistemas de 1 componente la primera ley de la termodinámica establece que

$$U(S, V, N) \quad \leftrightarrow \quad dU = TdS - pdV + \mu dN \quad (21)$$

Definiendo la energía libre de Gibbs como la transformada de Legendre en S y V resulta

$$\text{Gibbs : } G(T, p, N) = U - TS + pV \quad \leftrightarrow \quad dG = -SdT + Vdp + \mu dN. \quad (22)$$

G debe ser extensiva, puesto que T y p son variables intensivas, de la homogeneidad resulta

$$G(T, p, N) = N A(T, p) \quad \rightsquigarrow \quad G(T, p, N) = N \mu(T, p) \quad (23)$$

donde la expresión a la derecha resulta de $\mu = \partial G / \partial N|_{T, p}$. Igualando (23) y (22) obtenemos

$$\text{Relación de Euler variables extensivas y específicas : } \mu N = U - TS + pV \quad \leftrightarrow \quad \mu = u - Ts + pv \quad (24)$$

Usando (21) obtenemos,

$$\begin{aligned} \text{Gibbs-Duhem : } d(\mu N) &= d(U - TS + pV) \xrightarrow{ec.(21)} Nd\mu = -SdT + Vdp \\ &\longrightarrow d\mu = -sdT + vdp \end{aligned} \quad (25)$$

donde verificamos que $\mu = \mu(T, p)$. Las variables específicas resultan entonces expresables en términos de derivadas de μ en sus variables naturales

$$s = - \left. \frac{\partial \mu}{\partial T} \right|_p, \quad v = \left. \frac{\partial \mu}{\partial p} \right|_T$$

1^{ra} ley en variables específicas: solemos definir el calor en procesos adiabáticos como⁴

$$\delta Q \equiv TdS = T(Nds + sdN).$$

Por otra parte podemos reescribir la primera ley usando variables específicas como

$$dU + pdV - \mu dN = N(du + pdv) + (u + pv - \mu)dN,$$

igualando los rhs de estas dos últimas ecuaciones obtenemos

$$Tds = du + pdv + \underbrace{\left(\frac{u + pv - Ts - \mu}{N} \right) dN}_{=0 \text{ ec. (24)}} \quad (26)$$

Concluimos que la primera ley en términos de variables específicas resulta

$$\text{1ra ley en variables específicas : } Tds = du + pdv \Rightarrow \boxed{s = s(u, v)} \quad (27)$$

1^{ra} ley en términos de densidades: alternativamente, podemos pensar a la entropía como función de la densidad de energía $\rho = nu$ y la densidad de partículas $n = 1/v$, luego $s = \tilde{s}(\rho, n)$ ⁵

$$Td\tilde{s} = d\left(\frac{\rho}{n}\right) + pd\left(\frac{1}{n}\right) \rightarrow nTd\tilde{s} = d\rho - \frac{\rho + p}{n}dn \quad (28)$$

Definiendo la densidad de entropía como $\sigma = ns$ y multiplicando la derecha de (24) por n , resulta

$$\text{Relación de Euler en términos de densidades : } \rho + p = T\sigma + \mu n \quad (29)$$

De la segunda línea de (25) podemos despejar $p = p(T, \mu)$

$$dp = \sigma dT + n d\mu \quad (30)$$

que expresa alternativamente la relación de Gibbs-Duhem considerando a la temperatura y el potencial químico como variables independientes. En esta representación, las densidades se escriben como

$$\sigma = \left. \frac{\partial p}{\partial T} \right|_{\mu}, \quad n = \left. \frac{\partial p}{\partial \mu} \right|_T$$

La primera ley de la termodinámica en términos de densidades se escribe diferenciando (29)

$$d(\rho + p) = d(T\sigma + \mu n) \xrightarrow{\text{ec. (30)}} \text{1ra ley en densidades : } d\rho = Td\sigma + \mu dn \Rightarrow \boxed{\rho = \rho(\sigma, n)}$$

Resulta entonces que las variables naturales de la densidad de energía interna son $\rho = \rho(\sigma, n)$,

$$T = \left. \frac{\partial \rho}{\partial \sigma} \right|_n, \quad \mu = \left. \frac{\partial \rho}{\partial n} \right|_{\sigma}$$

⁴La razón para distinguir δQ de dQ es que si bien son infinitesimales, ds es una diferencial exacta mientras que δQ no lo es.

⁵Alternativamente (28) se suele escribir como

$$nTd\tilde{s} = d\rho - h dn$$

donde $h = u + pv$ es la entalpía específica del fluido.

Las ecuaciones de estado pueden expresarse de diferentes maneras dependiendo de la elección de los dos parámetros independientes.

Potencial gran canónico Ω : A partir de la representación de energía $\rho(\sigma, n)$ podemos definir otros potenciales, asociados a una elección distinta de variables. La relación de Gibbs-Duhem (30) nos dice que $p(T, \mu)$. Así como μ se corresponde con el potencial de Gibbs (23), la presión resulta ser el potencial gran canónico ω ya que de (29) tenemos

$$-p = \rho - T\sigma - \mu n \equiv \omega$$

El potencial extensivo gran canónico se define como

$$\text{Le Grand canónico : } \Omega(T, \mu, V) = U - TS - \mu N \quad \leftrightarrow \quad d\Omega = -SdT - pdV - Nd\mu. \quad (31)$$

Nuevamente tenemos solo una variable extensiva, luego, por procedimientos similares a (22)-(23) concluimos

$$\Omega(T, \mu, V) = -V p(T, \mu)$$

Función de partición $Z(\beta)$ y energía libre de Helmholtz F : la energía libre de Helmholtz se define

$$\text{Helmholtz : } F(T, V, N) = U - TS \quad \leftrightarrow \quad dF = -SdT - pdV + \mu dN. \quad (32)$$

Podemos definir $f \equiv \rho - T\sigma$ vemos que depende de $df = \mu dn - \sigma dT$.

12. Fluido perfecto es isoentrópico:

(a) A partir de la conservación del número de partículas (18), mostrar que la ecuación de continuidad (20) se puede escribir como

$$u^\nu \left(\nabla_\nu \left(\frac{\rho}{n} \right) + p \nabla_\nu \left(\frac{1}{n} \right) \right) = 0 \quad u^\nu \nabla_\nu \frac{d}{d\tau} \quad \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\rho}{n} \right) + p \frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{n} \right) = 0. \quad (33)$$

Comparando con el lado izquierdo de (28) concluimos que la entropía específica se conserva a lo largo del flujo. En otras palabras dado que $Tds = \delta q$ la evolución es localmente adiabática, la entropía por partícula no cambia a lo largo de la evolución. Una de las razones de la conservación de s a lo largo de las trayectorias de un fluido perfecto es que no existen fuerzas viscosas.

(b) Mostrar que para flujos isoentrópicos $s = cte$. las ecuaciones de Euler relativistas (19) para un fluido simple se reducen a

$$u^\rho \nabla_\rho u^\mu = -(\eta^{\mu\nu} + u^\mu u^\nu) \nabla_\nu (\ln h)$$

donde h es la entalpía específica.

13. Ecuaciones de estado:

(a) Dada la ecuación de estado $s(\rho, n)$ mostrar que a presión y la temperatura del sistema se expresan como

$$p(\rho, n) = -\rho - n \frac{s_n}{s_\rho}, \quad T(\rho, n) = \frac{1}{n s_\rho}$$

donde $s_\rho = \partial s / \partial \rho$ y $s_n = \partial s / \partial n$

(b) Mostrar que la presión es una función sólo de la densidad de energía si $s(\rho, n) = \sigma(x)$ donde $x = \rho g(\rho) / n$ con $g(\rho)$ una función arbitraria.

14. **Fluidos baritrópicos:** se denominan fluidos baritrópicos a los fluidos donde la presión sólo depende de la densidad de energía: $p = p(\rho)$. Considerando que el número de partículas se conserva, la entropía resulta una función de la energía interna y el volumen $S = S(U, V)$. De la 1ra ley tenemos $TdS = dU + pdV$ de manera que

$$T = \left(\frac{\partial S}{\partial U} \right)_V^{-1}, \quad p = T \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_U$$

(i) Mostrar que

$$p = w\rho = wU/V \Rightarrow V\partial_V S = wU\partial_U S \Rightarrow S = S(V^w U)$$

(ii) Verificar esta última afirmación para el caso de radiación electromagnética.

Ayuda: usar para un gas de fotones $S \sim U/T$ (ver wikipedia) y la ley de Stefan-Boltzmann $\rho \sim T^4$

15. **Corriente de entropía:** definiendo la corriente de entropía como $\sigma^\mu = \sigma u^\mu$ mostrar que podemos escribir el tensor de energía impulso de un fluido perfecto como

$$T_{\mu\nu} = (T\sigma_\mu + \mu n_\mu)u_\nu + p\eta_{\mu\nu}$$

y que la ley de conservación implica

$$T\nabla^\alpha \sigma_\alpha + \mu\nabla^\alpha n_\alpha = 0$$

Esta ecuación nos dice que, en presencia de potencial químico no nulo, la no conservación del número de partículas implica una variación de la corriente de entropía. Si el número de partículas se conserva (o si μ es despreciable), la corriente de entropía también es conservada y podemos escribir $\nabla^\alpha \sigma_\alpha = u^\alpha \nabla_\alpha \sigma + \sigma\theta$ donde $\theta = \nabla \cdot \mathbf{u}$ se denomina parámetro de expansión. Dado que una fórmula análoga vale para \mathbf{n} mostrar que la entropía por partícula $s = \sigma/n$ se conserva a lo largo del flujo

$$\frac{D}{D\tau} s = u^\alpha \nabla_\alpha s = 0$$

Presión de un fluido isoentrópico: en situaciones donde la entropía específica es constante de (28) tenemos que $\rho = \rho(n)$,

$$d\rho = \frac{\rho + p}{n} dn \quad \rightarrow \quad p = n \frac{d\rho}{dn} - \rho \quad (34)$$

Luego, la presión es el opuesto de la transformada de Legendre de de la densidad de energía. Para polvo $p = 0$ y radiación $p = \rho/3$ resulta

$$\frac{d\rho}{dn} = \frac{\rho + p}{n} \quad \Rightarrow \quad \text{Polvo : } \rho_{polvo}(n) \sim n, \quad \text{Radiación : } \rho_{rad}(n) \sim n^{4/3} \quad (35)$$

En general, de $p = \eta\rho$ se obtiene

$$\rho(n) = \alpha n^{1+\eta} \quad \rightarrow \quad p = n\rho' - \rho = \eta\alpha n^{1+\eta}$$

la cual conduce a una relación lineal entre ρ y p

$$p = \eta \rho$$

Nota: el caso $\rho = -p$ es muy particular pues tanto ρ, p son independientes de n . Luego, no es posible cambiar la densidad de energía pues no depende de ningún parámetro. Reexpresando (34) como

$$vd\rho = -(\rho + p)dv$$

vemos que en el caso $\rho = -p$ no hay cambio en la densidad de energía frente a cambios de volumen.

16. Ecuaciones de estado II:

(a) La corrección por temperatura finita, en el límite no relativista $kT \ll mc^2$, a ρ_{polvo} en (35) es proporcional a la presión

$$\rho = nm + \frac{3}{2}p$$

A partir de la relación (34) obtener

$$\rho(n) = nm + \kappa n^{5/3}, \quad p(n) = \frac{2\kappa}{3} n^{5/3} \quad (36)$$

donde $\kappa = \frac{3}{2}p_0/n_0^{5/3}$ con p_0 la presión a una densidad de referencia n_0 .

(b) Integrando la relación (30) considerando que el flujo es isoentropico y sin cambio de potencial químico, hallar la dependencia de la temperatura con n

$$T(n) \sim n^{2/3}$$

(c) Reexpresar la ecuación de estado para la presión en términos de temperatura obteniendo

$$p \sim nT \quad \leftrightarrow \quad pV \sim NT$$

Ir a los libros y verificar que los resultado son los conocidos de termodinámica clásica.

Ondas de sonido: Considerar un fluido estático $n = n_0$ y $p = p_0$ constantes con $\mathbf{v}_0 = 0$. Esta última condición significa que la velocidad del flujo (la velocidad promedio para el transporte de partículas) es nula, sin embargo esto no significa que la velocidad de partículas individuales es nula, las partículas pueden ser ultrarelativistas si $kT \gg mc^2$. Consideremos una pequeña fluctuación alrededor de los valores de equilibrio

$$n = n_0 + \delta n, \quad \mathbf{v} = \delta \mathbf{v}$$

Naturalmente tendremos

$$\rho = \rho_0 + \delta \rho, \quad p = p_0 + \delta p$$

cuyas variaciones resultan

$$\delta \rho = f'_0 \delta n, \quad \delta p = n_0 f''_0 \delta n = \frac{n_0 f''_0}{f'_0} \delta \rho \quad (37)$$

Linealizando las ecuaciones de movimiento en espacio de Minkowski obtenemos

$$\frac{\partial \delta n}{\partial t} + \nabla \cdot (n_0 \delta \mathbf{v}) = 0, \quad \frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0 + p_0} \nabla (\delta p)$$

insertando $\rho + p = n\rho'$ y usando (37) queda

$$\frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{f_0''}{f_0'} \nabla (\delta n)$$

que combinada con la primera ecuación de (37) resulta

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{n_0 f_0''}{f_0'} \nabla^2 \right) \delta n = 0 \quad \Rightarrow \quad c_s^2 = \frac{n_0 f_0''}{f_0'} = \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_0$$

De (36) resulta para gases no relativistas $c_s^2 = 5p_0/3mn_0 \ll 1$, mientras que para un gas relativista $c_s^2 = 1/3 < 1$. En ningún caso la velocidad del sonido supera la de la luz.

Apéndices

Gas ideal: hallemos la energía interna de un gas ideal en variables naturales. La ecuación de estado es $pV = \mathbf{N}RT$ aquí \mathbf{N} es el número de moles, y la energía interna como función de la temperatura es $U = \mathbf{N}C_V T$. Deseamos hallar $S(U, V, \mathbf{N})$, homogeneidad en este caso nos dice que $S(U, V, N) = \mathbf{N}f\left(\frac{U}{\mathbf{N}}, \frac{V}{\mathbf{N}}\right)$, hallemos f . De la primera ley tenemos

$$\begin{aligned} dS &= \frac{1}{T}dU + \frac{p}{T}dV \\ &= \mathbf{N}C_V \frac{dT}{T} + \mathbf{N}R \frac{dV}{V} \rightsquigarrow S = \mathbf{N} \left(C_V \ln \frac{T}{T_0} + R \ln \frac{V}{V_0} \right) = \mathbf{N} \ln \left(T^{C_V} \left(\frac{V}{\mathbf{N}} \right)^R \right) + cte \end{aligned} \quad (38)$$

donde introdujimos V/\mathbf{N} para satisfacer homogeneidad. A partir de la expresión de la energía interna concluimos

$$S(U, V, N) = \mathbf{N}R \left[\ln \left(\left(\frac{U}{\mathbf{N}} \right)^{\frac{C_V}{R}} \frac{V}{\mathbf{N}} \right) + s_0 \right]$$

Podemos expresarla en términos del número de partículas usando $\mathbf{N}R = Nk$, la constante s_0 fue determinada por Seckur-Tetrode. Para un gas monoatómico $C_V = \frac{3}{2}R$ y $s_0 = \frac{3}{2} \ln \left(\frac{m}{3\pi\hbar^2} \right) + \frac{5}{2}$

. **Sakur-Tetrode** - à la Boltzmann - mikrocanónica: sumando microestados. Consideremos N partículas idénticas libres de masa m , $H = \frac{1}{2m}(\mathbf{p}_1^2 + \dots + \mathbf{p}_N^2)$, en un volumen V . Llamando W' al número de configuraciones en el espacio de las fases⁶

$$\begin{aligned} S(E, V, N) &= k_B \ln \frac{W'(E, V)}{N!} \quad \text{donde} \quad W' = \int \prod_{i=1}^N \frac{d\mathbf{q}_i d\mathbf{p}_i}{(2\pi\hbar)^3} \delta(E - H(\mathbf{q}, \mathbf{p})) \\ &= \left(\frac{V}{2\pi\hbar^3} \right)^N \underbrace{\text{Area}_{3N}(R)}_{R^{3N-1} \text{Area}_{3N}(1)} \simeq \left(\frac{V}{2\pi\hbar^3} \right)^N R^{3N} \text{Vol}_{3N}(1) \end{aligned}$$

donde $R = \sqrt{2mE}$ y el factor $1/N!$ es necesario para resolver la paradoja de Gibbs, configuraciones relacionadas por un intercambio de partículas no deben ser consideradas como distintas. El *area* de la de la esfera de energía se aproxima en el límite termodinámico por el volumen encerrado por la esfera de energía dado que $\ln R^{3N} \sim \ln R^{3N-1}$ en el límite $N \rightarrow \infty$. Usando $\text{Vol}_n(1) = \frac{\pi^{n/2}}{(n/2)\Gamma(n/2)}$ tenemos

$$S(E, V, N) = k_B \ln \left(\frac{(2\pi m E)^{\frac{3N}{2}} V^N}{(2\pi\hbar)^{3N} \Gamma(\frac{3N}{2} + 1) N!} \right)$$

usando Stirling $\ln N! \sim N(\ln N - 1)$ resulta

$$S(E, V, N) = k_B N \left(\frac{3}{2} \ln \frac{E}{N} + \ln \frac{V}{N} + \frac{3}{2} \ln \frac{m}{3\pi\hbar^2} + \frac{5}{2} \right) \quad (39)$$

. via función de partición - $T \neq 0$: considerando N partículas no interactuantes tenemos

$$Z = \frac{Z_1^N}{N!}$$

donde Z_1 la función de partición de una partícula y, nuevamente, $N!$ da cuenta de la indistinguibilidad. Recordando que la función de partición $Z(\beta, V, N)$ se relaciona con la energía libre de Helmholtz como ($\beta = 1/kT$)

$$\begin{aligned} \beta F &= -\ln Z \stackrel{ec.(32)}{\rightsquigarrow} S = k\partial_T(T \ln Z) = k(\ln Z - \underbrace{\beta \partial_\beta \ln Z}_{-\langle E \rangle}) \\ &= \beta(U - F) \end{aligned} \quad (40)$$

⁶ $\text{Area}_d(R)/\text{Vol}_d(R)$ denotan el área/volumen de la esfera de radio R en d dimensiones. Dado que $\text{Vol}_n(R) = \int_{|\mathbf{x}| \leq R} dx_1 \dots dx_n = R^n \text{Vol}_n(1)$ se sigue de $dx_1 \dots dx_n = \text{Vol}_n(1) n R^{n-1} dR$ que $\text{Area}_n(1) = n \text{Vol}_n(1)$.

la segunda línea se sigue de la definición de F como transformada de Legendre de U ec. (32), naturalmente $U = \langle E \rangle$. Usando Stirling tenemos

$$S = k(\ln Z + \beta E) = kN \left(\ln \frac{Z_1}{N} + 1 + \frac{\beta E}{N} \right) \quad (41)$$

La función de partición de una partícula esta dada por

$$Z_1 = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int_V d\mathbf{q} \int d\mathbf{p} \exp(-\beta \mathbf{p}^2/2m) = \frac{V}{\lambda^3} \quad \text{donde la longitud térmica de de Broglie } \lambda = \frac{h}{\sqrt{2\pi mkT}}$$

insertando en (41) resulta

$$S(T, V, N) = kN \left(\ln \frac{V}{\lambda^3 N} + \frac{5}{2} \right)$$

reemplazando la energía interna de un gas ideal $U = \frac{3}{2} NkT$ reobtenemos (39).

Referencias

An Introduction to General Relativity, L Hughston and K Tod
Gravitation, S Weinberg