lNTRODUCCIÓN A LA RELATIVIDAD GENERAL 2019
Departamento de Física, UNLP

Glosario y Notación

. V: espacio vectorial
. V^*: espacio dual a V
. $\mathcal{M}$: variedad, manifold
. p, q: puntos en la variedad $\mathcal{M}$
. $T_p(\mathcal{M})$: espacio tangente en el punto p
. $T_p^*(\mathcal{M})$: espacio cotangente en el punto p (dual a $T_p(\mathcal{M})$)
. $T(\mathcal{M}) = \cup_{p\in\mathcal{M}} T_p(\mathcal{M})$: fibrado tangente
. $T^*(\mathcal{M}) = \cup_{p\in\mathcal{M}} T_p^*(\mathcal{M})$: fibrado cotangente
. x^μ: coordenadas locales de una carta. Parametrizan un abierto $\mathcal{U} \in \mathcal{M}$
. μ, ν: índices griegos denotan componentes en base de coordenadas. world indices
. a, b: denotan componentes en el espacio tangente. tangent space indices
. $\mathcal{C}, \gamma(\lambda)$: curva sobre $\mathcal{M}$
. $x^\mu(\lambda)$: parametrización de una curva sobre $\mathcal{M}$
. $\mathcal{F}(\mathcal{M})$: espacio de funciones suaves sobre $\mathcal{M}$
. $\mathfrak{X}(\mathcal{M})$: espacio de campos vectoriales sobre $\mathcal{M}$. Espacio de secciones del fibrado tangente
. $\boldsymbol{V}, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{T}$: vectores, formas y tensores se denotan en negrita.
. $\boldsymbol{\partial}_\mu$: base local coordenada de $T_p(\mathcal{M})$
. $\boldsymbol{E}_a$: base de vectores en p.
. $\boldsymbol{d}x^\mu$: base local coordenada de 1-formas. Son duales a $\boldsymbol{\partial}_\mu$: $\langle \boldsymbol{d}x^\mu | \boldsymbol{\partial}_\nu \rangle = \delta^\mu_\nu$
. $\boldsymbol{e}^a$: base de 1-formas. Son duales a $\boldsymbol{E}_a$: $\langle \boldsymbol{e}^a | \boldsymbol{E}_b \rangle = \delta^a_b$
. $\Lambda_a{}^b(x)$: cambio de base local. $\tilde{\boldsymbol{E}}_a = \Lambda_a{}^b(x) \boldsymbol{E}_b$
. $\Lambda^a{}_b(x)$: cambio de frame local. $\tilde{\boldsymbol{e}^a} = \Lambda^a{}_b(x) \boldsymbol{e}^b$. Las matrices satisfacen: $\Lambda_a{}^b(x)\Lambda^a{}_c(x) = \delta^b_c$
. $\boldsymbol{V} = V^\mu \boldsymbol{\partial}_\mu = V^a \boldsymbol{E}_a$: vector. V^μ componentes en base coordenadas. V^a base arbitraria.
. $\boldsymbol{V}[f] = V^\mu(x) \frac{\partial f}{\partial x^\mu}$: acción de un vector sobre una función
. $\boldsymbol{\omega} = \omega_\mu(x) \boldsymbol{d}x^\mu = \omega_a(x) \boldsymbol{e}^a$: 1-forma. ω_μ componentes en base coordenadas. ω_a base arbitraria.
. $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{V}) = \langle \boldsymbol{\omega} | \boldsymbol{V} \rangle = \omega_a V^a$: acción de la 1-forma $\boldsymbol{\omega}$ sobre el vector $\boldsymbol{V}$
. $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\eta}^1, \cdots, \boldsymbol{\eta}^m, \boldsymbol{V}_1, \ldots, \boldsymbol{V}_n)$: tensor $\binom{m}{n}$ los primeros slots corresponden a 1-formas, luego vectores,

$$\boldsymbol{T} = T^{a_1 \ldots a_m}{}_{a_{m+1} \ldots a_{m+n}} \boldsymbol{E}_{a_1} \otimes \ldots \otimes \boldsymbol{E}_{a_m} \otimes \boldsymbol{e}^{a_{m+1}} \otimes \ldots \otimes \boldsymbol{e}^{a_{m+n}}$$

donde

$$T^{a_1 \ldots a_m}{}_{a_{m+1} \ldots a_{m+n}} = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}^{a_1}, \cdots, \boldsymbol{e}^{a_m}, \boldsymbol{E}_{a_{m+1}}, \ldots, \boldsymbol{E}_{a_{m+n}})$$

. $\boldsymbol{d}$: derivada exterior
. Ω^p: espacio de p-formas
. $\wedge$: producto exterior, satisface $\boldsymbol{\alpha}_p \wedge \boldsymbol{\beta}_q = (-)^{pq} \boldsymbol{\beta}_q \wedge \boldsymbol{\alpha}_p$
. $\mathcal{L}_{\boldsymbol{K}}$: derivada de Lie a lo largo del vector $\boldsymbol{K}$
. $i_{\boldsymbol{X}}$: producto interno sobre formas.
. $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{W}) = \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{W} = V^\mu W^\nu g_{\mu\nu}$: métrica, tensor $\binom{0}{2}$. Producto escalar. $\boldsymbol{g} = g_{\mu\nu}(x) \boldsymbol{d}x^\mu \otimes \boldsymbol{d}x^\nu$.
. $g_{\mu\nu} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{\partial}_\mu, \boldsymbol{\partial}_\nu)$. Componentes de la métrica en base coordenada.
. $*$: dual de Hodge
. $\psi : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ mapa entre variedades $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$. Sea $p \in \mathcal{M}$ y $q \in \mathcal{N}$ su imagen, denotamos $q = \psi(p)$
En cartas locales siendo x^α coords de $\mathcal{M}$ y y^β coords de $\mathcal{N}$, dar ψ es entonces equivalente a dar $y^\beta(x^\alpha)$
. $\psi^* : \mathcal{F}(\mathcal{N}) \to \mathcal{F}(\mathcal{M})$ pullback sobre funciones.
Siendo $g \in \mathcal{N}$ denotamos su pullback a $\mathcal{M}$ como

$$g^* = \psi^* g \doteq g \circ \psi$$

Sea x^α coords de $\mathcal{M}$ y y^β coords de $\mathcal{N}$ tenemos $g = g(y)$, luego $g^*(x) = g(y(x))$.
. $\psi_* : T_p(\mathcal{M}) \to T_{\psi(p)}(\mathcal{N})$ pushforward. Actua sobre tensores contravariantes.
Sea $g \in \mathcal{F}(\mathcal{N})$, $\boldsymbol{V} \in T_p(\mathcal{M})$, el pushforward a $\mathcal{N}$ se denota $\psi_* \boldsymbol{V} \in T_{\psi(p)}(\mathcal{N})$ y define por

$$\boldsymbol{V}_* = \psi_* \boldsymbol{V}[g] \doteq \boldsymbol{V}[\psi^* g] = \boldsymbol{V}[g \circ \psi]$$

En coordenadas locales resulta

$$V_*{}^\beta(y) = \frac{\partial y^\beta}{\partial x^\alpha} V^\alpha(x)$$

. $\boldsymbol{V}_*$: pushforwarded vector

. $\psi^* : T^*_{\psi(p)}(\mathcal{N}) \to T^*_p(\mathcal{M})$ pullback. Actúa sobre tensores covariantes.
Siendo $\boldsymbol{V} \in T_p(\mathcal{M})$, $\boldsymbol{\omega} \in T^*_{\psi(p)}(\mathcal{N})$ el pullback a $\mathcal{M}$ se denota $\psi^*\boldsymbol{\omega} \in T_p(\mathcal{M})$ y define por

$$\boldsymbol{\omega}^*[\boldsymbol{V}] = (\psi^*\boldsymbol{\omega})[\boldsymbol{V}] \doteq \boldsymbol{\omega}[\psi_*\boldsymbol{V}]$$

En coordenadas locales

$$\omega^*{}_\alpha(x) = \frac{\partial y^\beta}{\partial x^\alpha}\omega_\beta(y)$$

. $\boldsymbol{\omega}^*$: pullbacked covariant tensor.
. $y^\alpha(t, y_{_0})$: Curvas integrales de $\boldsymbol{K}$: $\frac{dy^\alpha}{dt} = K^\alpha(y(t))$ condición inicial $y^\alpha(0) = y^\alpha_{_0}$
. $\psi_t : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ familia monoparamétrica de difeomorfismos. En una carta local $\psi_t : x^\alpha \to y^\alpha(t, x)$
. $\nabla_{\boldsymbol{E}_a}\boldsymbol{E}_b = \boldsymbol{\omega}^c{}_b(\boldsymbol{E}_a)\boldsymbol{E}_c$: conexión afín en la base $\boldsymbol{E}_a$
. $\nabla_{\boldsymbol{E}_a}\boldsymbol{e}^b = -\boldsymbol{\omega}^b{}_c(\boldsymbol{E}_a)\boldsymbol{e}^c$: acción de la derivada covariante sobre la base dual $\boldsymbol{e}^b$
. $\Gamma_a{}^c{}_b = \boldsymbol{\omega}^c{}_b(\boldsymbol{E}_a)$. Símbolos de Christoffell. componentes de la conexión afín $\boldsymbol{\omega}^c{}_b = \Gamma_a{}^c{}_b\boldsymbol{e}^a$.
La expresión para la conexión afín resulta

$$\nabla_{\boldsymbol{E}_a}\boldsymbol{E}_b = \Gamma_a{}^c{}_b\boldsymbol{E}_c$$

. $\left\{ \begin{array}{c} \mu \\ \nu\rho \end{array} \right\} = \frac{1}{2}g^{\mu\alpha}(\partial_\nu g_{\rho\alpha} + \partial_\alpha g_{\nu\alpha} - \partial_\alpha g_{\nu\rho})$. Conexión de Levi-Civita: cf. ec (6).
. Tensor de Torsión: tensor $\binom{1}{2}$

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) = \nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Y} - \nabla_{\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{X} - [\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}] \tag{1}$$

. Tensor de Curvatura de Riemann: tensor $\binom{1}{3}$

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) = \nabla_{\boldsymbol{X}}\nabla_{\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{Z} - \nabla_{\boldsymbol{Y}}\nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Z} - \nabla_{[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}]}\boldsymbol{Z}$$

. Ecuaciones de estructura de Cartan:

$$\begin{aligned} \text{1ra Ecuación :} \quad & \boldsymbol{T}^a = \boldsymbol{d}\boldsymbol{e}^a + \boldsymbol{\omega}^a{}_b \wedge \boldsymbol{e}^b \\ \text{2da Ecuación :} \quad & \boldsymbol{R}^a{}_b = \boldsymbol{d}\boldsymbol{\omega}^a{}_b + \boldsymbol{\omega}^a{}_c \wedge \boldsymbol{\omega}^c{}_b \end{aligned}$$

. Geodesicas: en general consideramos a la métrica y conexión afín como variables independientes, luego existen dos definiciones alternativas de geodésica:

Geodesica métrica : curva de longitud mínima entre dos puntos,
obtenida mediante el principio de mínima acción:

$$S = \int d\lambda\sqrt{g_{\mu\nu}(x)x'^\mu x'^\nu} \quad \Rightarrow \quad \ddot{x}^\mu + \left\{ \begin{array}{c} \mu \\ \nu\rho \end{array} \right\}\dot{x}^\nu x^\rho = 0 \;\; \text{donde} \;\; \dot{x}^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$$

es útil fijar parametrización de tiempo propio: $d\tau = \sqrt{g_{\mu\nu}(x)x'^\mu x'^\nu}d\lambda$

Geodésica afín : curva con vector tangente covariantemente constante. Denotando $t^\mu = \dfrac{dx^\mu}{d\tau}$
corresponde a una trayectoria no acelerada

$$\nabla_{\boldsymbol{t}}\boldsymbol{t} = 0 \quad \to \quad \ddot{x}^\mu + \Gamma^\mu_{\nu\rho}(x)\dot{x}^\nu\dot{x}^\rho = 0$$

Las geodésicas afines y métricas no coinciden, solo resultan equivalentes para la conexión de Levi-Civita.
. $\nabla_{\boldsymbol{t}}\boldsymbol{V} = 0$: transporte paralelo del vector $\boldsymbol{V}$ a lo largo de una curva $\gamma(\lambda)$ con vector tangente $\boldsymbol{t} = \frac{d}{d\lambda}$.
En coordenadas locales tenemos $\gamma \mapsto x^\mu(\lambda)$, dada la condición inicial $V^\mu(0)$ debemos resolver

$$\dot{x}^\rho(V^\mu{}_{,\rho} + \Gamma^\mu_{\rho\sigma}V^\sigma) = 0 \quad \to \quad \frac{dV^\mu}{d\lambda} = -\Gamma^\mu_{\rho\sigma}\dot{x}^\rho V^\sigma \quad \to \quad \mathsf{V}(\lambda) = \mathcal{P}e^{-\int^\lambda \mathsf{\Gamma}_\mu \mathsf{d}\mathsf{x}^\mu}\,\mathsf{V}(0)$$

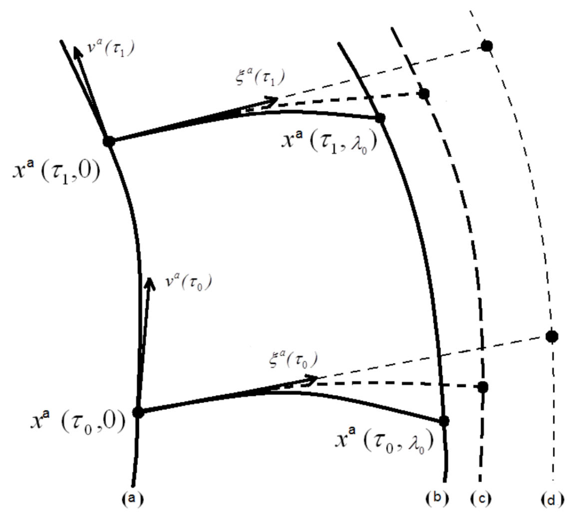
donde $\mathcal{P}$ indica que la matriz $\mathsf{\Gamma}_\mu = (\mathsf{\Gamma}_\mu)^\alpha_\beta$ debe ir path ordenada.

. Usos del tensor de Riemann: el tensor de Riemann es del tipo $\binom{1}{3}$

$$\boldsymbol{R}(\cdot\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)$$

con una entrada para 1-formas y tres entradas para vectores. De manera que si ocupamos las entradas para vectores, $\boldsymbol{R}(\cdot\cdot,\boldsymbol{W},\boldsymbol{U},\boldsymbol{V})$ obtenemos un vector que explícitamente resulta

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}(\cdot\cdot,\boldsymbol{W},\boldsymbol{U},\boldsymbol{V}) &= [\nabla_{\boldsymbol{U}},\nabla_{\boldsymbol{V}}]\boldsymbol{W} - \nabla_{[\boldsymbol{U},\boldsymbol{V}]}\boldsymbol{W} \\ &= R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}W^{\beta}U^{\mu}V^{\nu}\boldsymbol{\partial}_{\alpha}\end{aligned} \tag{2}$$



Desviación geodésica. Ecuación de Jacobi: Deseamos evaluar si dos geodésicas vecinas inicialmente paralelas, (a) y (b) en la figura, se mantienen paralelas a tiempos posteriores. Por ejemplo: los meridianos de una esfera son paralelos en el ecuador pero no lo son en otras latitudes (se acercan).
A tal fin definimos:
Geodésicas: (a),(b),(c),(d) en la figura, de vector tangente $\boldsymbol{v} = d/d\tau$ tal que $\nabla_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{v} = 0 \;\rightsquigarrow\; x^a(\tau)\ \forall\tau$.
Desviación geodésica: vector $\boldsymbol{\xi}$ cuyas curvas integrales unen puntos de igual tiempo propio τ a lo largo de geodésicas vecinas. La parametrización λ de las curvas integrales de $\boldsymbol{\xi} = d/d\lambda$ es tal que cada geodésica (a), (b) o (c) queda identificada por un valor fijo de $\lambda = 0, \lambda_0, \lambda_1, ...$ en la figura.
Esto significa que los paramétros τ y λ funcionan como coordenadas ("cierran cuadriláteros"): $[\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{v}] = 0$.
Inicialmente asumimos que las geodésicas (a) y (b) son paralelas: esto es, la dirección de $\boldsymbol{v}$ en la geodésica (b) se obtiene de transportar paralelamente en la dirección de $\boldsymbol{\xi}$ el vector $\boldsymbol{v}$ en (a). Para averiguar si este paralelismo se mantiene a lo largo de las geodésicas debemos evaluar si el transporte paralelo de (a)→(b) cambia al movernos a lo largo de las geodesicas. Debemos entonces calcular

$$\frac{d}{d\tau}(\nabla_{\boldsymbol{\xi}}\boldsymbol{v}) \overset{?}{=} 0 \quad\rightsquigarrow\quad \nabla_{\boldsymbol{v}}(\nabla_{\boldsymbol{\xi}}\boldsymbol{v}) = \;?$$

De (2), tomando en cuenta que $\nabla_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{v} = 0$ y que τ, λ sirven como coordenadas, resulta

$$\boldsymbol{R}(\cdot\cdot,\boldsymbol{v},\boldsymbol{v},\boldsymbol{\xi}) = \nabla_{\boldsymbol{v}}(\nabla_{\boldsymbol{\xi}}\boldsymbol{v}) \tag{3}$$

Por otro lado puesto que $[\boldsymbol{v},\boldsymbol{\xi}] = 0$, si la torsión es nula, de (1) tenemos que $\nabla_{\boldsymbol{\xi}}\boldsymbol{v} = \nabla_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{\xi}$, que reemplazada en (3) conduce a la ecuación de desviación geodésica

$$\nabla_{\boldsymbol{v}}(\nabla_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{R}(\cdot\cdot,\boldsymbol{v},\boldsymbol{v},\boldsymbol{\xi}).$$

que en base coordenada toma la forma

$$\text{Ecuación de Jacobi :}\qquad \boxed{\frac{d^2\xi^{\mu}}{d\tau^2} = R^{\mu}{}_{\beta\mu\nu}v^{\beta}v^{\mu}\xi^{\nu}}$$

—

GEOMETRIA

Einstein-Hilbert $\mathcal{L}(g)$ vs. Palatini $\mathcal{L}(g,\Gamma)$

. Palatini: las variables (independientes) dinámicas en $\mathcal{M}$ son la métrica y la conexión.
. Simetría: sea dim $\mathcal{M}=d$, la teoría es invariante bajo diffeomorfismos

$$x^\mu \to \tilde{x}^\mu(x^\alpha), \qquad J^\mu{}_\alpha = \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\alpha} = \partial_\alpha \tilde{x}^\mu, \qquad (J^{-1})^\alpha{}_\mu = \tilde{\partial}_\mu x^\alpha, \qquad J \in GL(d,\mathbb{R}) \tag{4}$$

y los símbolos de Christoffell $\mathbf{\Gamma}^\alpha{}_\beta = \Gamma^\alpha_{\mu\beta}\boldsymbol{d}x^\mu$ transforman/ofician de campos de gauge

$$\tilde{\mathbf{\Gamma}}^\rho{}_\nu = J^\rho{}_\alpha\, \mathbf{\Gamma}^\alpha{}_\gamma (J^{-1})^\gamma{}_\nu + J^\rho{}_\alpha\, \boldsymbol{d}(J^{-1})^\alpha{}_\nu \tag{5}$$

. Conexión de Levi-Civita: pidiendo que la conexión ∇ sea compatible con la métrica y que la torsión sea nula,

$$\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = 0 \quad \oplus \quad \boldsymbol{T}^a = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{\Gamma} = \text{ Levi-Civita} \tag{6}$$

Obtenemos ecuaciones que permiten resolver para $\mathbf{\Gamma}$ de manera algebráicas. La solución da origen a la conexión de Levi-Civita

$$\text{Levi}-\text{Civita}: \qquad \Gamma^\alpha_{\mu\beta}(g) = \frac{1}{2} g^{\alpha\gamma}(\partial_\mu g_{\beta\gamma} + \partial_\beta g_{\mu\gamma} - \partial_\gamma g_{\mu\beta}) \tag{7}$$

La teoría de la relatividad General de Einstein asume (6) reduciendo el número de grados de libertad sobre $\mathcal{M}$. Solo $g_{\mu\nu}$ es dinámica $\rightsquigarrow$ acción de Einstein-Hilbert.
. Dinámica: está definida por

$$\mathcal{L} = \mathcal{F}(g_{\mu\nu})$$

con $\mathcal{F}$ invariante bajo diffeos. Dependerá entonces de contracciones de

$$g_{\mu\nu}, R^\alpha{}_{\beta\mu\nu}, R_{\mu\nu}, R$$

donde

$$\begin{aligned} R^\alpha{}_{\beta\mu\nu}(\mathbf{\Gamma}) &\equiv \partial_\mu \Gamma^\alpha_{\nu\beta} - \partial_\nu \Gamma^\alpha_{\mu\beta} + \Gamma^\alpha_{\mu\gamma}\Gamma^\gamma_{\nu\beta} - \Gamma^\alpha_{\nu\gamma}\Gamma^\gamma_{\mu\beta} \text{ con } \ \mathbf{\Gamma} = eqn(7) \\ R_{\mu\nu} &\equiv R^\gamma{}_{\mu\gamma\nu} \\ R &\equiv g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \end{aligned}$$

como la curvatura es un tensor en segundas derivadas en g, Lagrangianos arbitrarios dan lugar en ppio a ecuaciones de cuarto orden para g. Solo para la acción de Einstein-Hilbert y las extensiones de Lovelock obtenemos ecuaciones de segundo orden para g.
. Palatini: Si consideramos a la métrica y la conexión como variables independientes, la condición símbolos de Cristoffel=conexión de Levi-Civita no es axioma adicional sino que se deduce de

$$S = \int \sqrt{g}\, R(\Gamma)$$

variando respecto de Γ. Puesto que la ecuación resulta algebráica para Γ a parir del lema de eliminación (ver Práctica 0), podemos introducirlo en la acción y arribar a la acción de Einstein-Hilbert.

Formalismo de Tétradas[1]

. Variables: tétrada $\boldsymbol{e}^a$ y conexión de spín $\boldsymbol{\omega}^a{}_b$. La métrica $g_{\mu\nu}$ es una cantidad derivada a partir de las formas locales $\boldsymbol{e}^a(x)$. Llamando $e = \det e^a_\mu$ tenemos

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{ab} e^a_\mu(x) e^b_\nu(x) \Rightarrow \sqrt{-g} = e$$

Indices planos y curvos suben y bajan con η_{ab} y $g_{\mu\nu}$.
. Simetría: La teoría es invariante bajo diffeos (4) y transformaciones de Lorentz locales (TLL)[2]

$$e^a_\mu \to \tilde{e}^a_\mu = \Lambda^a{}_b(x) e^b_\mu, \quad \Lambda^a{}_b(x) \in SO(d-1,1) \tag{8}$$

. Derivada covariante: introducimos una derivada $\mathfrak{D}$ covariante bajo diffeos y TLL

$$\mathfrak{D}_\mu e^a_\nu = \partial_\mu e^a_\nu - \Gamma^\rho_{\mu\nu} e^a_\rho + \omega_\mu{}^a{}_b e^b_\nu$$

$\boldsymbol{\Gamma}$ y $\boldsymbol{\omega}$ son campos de gauge frente a (4) y (8). Denotando $\Lambda^a{}_b \to \Lambda$ la ley de transformación para la conexión de espín es

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}} = \mathsf{\Lambda}\boldsymbol{\omega}\mathsf{\Lambda}^{-1} + \mathsf{\Lambda}\mathsf{d}\mathsf{\Lambda}^{-1}$$

. Compatibilidad métrica: (6) se traduce en

$$\text{veirbein postulate}: \quad \mathfrak{D}_\mu e^a_\nu = 0 \quad \oplus \quad \mathfrak{D}_\mu \eta_{ab} = 0$$

la primera condición determina $\boldsymbol{\omega}$ en términos de $\boldsymbol{\Gamma}$, nuevamente de manera algebráica

$$\omega_\mu{}^a{}_b(\boldsymbol{e}^a, \boldsymbol{\Gamma}) = -e^\nu_b \partial_\mu e^a_\nu + \Gamma^\alpha_{\mu\beta} e^a_\alpha e^\beta_b$$

y la segunda conduce a $\boldsymbol{\omega}_{ab} = -\boldsymbol{\omega}_{ba}$. En ppio, $\boldsymbol{\Gamma}$ es una variable independiente, podría tener torsión, etc..
. Tensor de curvatura: se define como $\boldsymbol{R}^a{}_b = \boldsymbol{d}\boldsymbol{\omega}^a{}_b + \boldsymbol{\omega}^a{}_c \wedge \boldsymbol{\omega}^c{}_b$, en componentes

$$R^a{}_{b\mu\nu}(\boldsymbol{\omega}) = \partial_\mu \omega^a_{\nu b} - \partial_\nu \omega^a_{\mu b} + \omega^a_{\mu c}\omega^c_{\nu b} - \omega^a_{\nu c}\omega^c_{\mu b}$$

—

La conexión entre formalismos proviene de

$$R^a{}_{b\mu\nu}(\boldsymbol{\omega}) = e^a_\alpha e^\beta_b \; R^\alpha{}_{\beta\mu\nu}(\boldsymbol{\Gamma})$$

La identidad vale aún en presencia de torsión, pero solo para conexiones compatibles con la métrica.

—

1. Considerar el espacio-tiempo d-dimensional

$$ds^2 = e^{2\lambda r}\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + dr^2, \quad \lambda = \sqrt{\frac{2\Lambda}{(d-1)(d-2)}} \tag{9}$$

(a) Mostrar que la conexión de espín que resulta de torsión nula para $\boldsymbol{e}^{\underline{\mu}} = e^{\lambda r}dx^\mu$ y $\boldsymbol{e}^{\underline{r}} = dr$ es

$$\boldsymbol{\omega}^{\underline{\mu}\underline{r}} = \lambda \boldsymbol{e}^{\underline{\mu}}, \quad \boldsymbol{\omega}^{\underline{\mu}\underline{\nu}} = 0$$

donde $a = (\underline{\mu}, \underline{r})$ denotan índices en el espacio tangente.
(b) Mostrar que la 2-forma de curvatura resulta

$$\boldsymbol{R}^{ab} = -\lambda^2 \boldsymbol{e}^a \wedge \boldsymbol{e}^b$$

de manera que el tensor de Riemann es maximalmente simétrico

$$R_{abcd} = -\lambda^2(\eta_{ac}\eta_{bd} - \eta_{ad}\eta_{bc})$$

Este resultado era esperado pues la métrica (9) describe AdS$_d$ con tensor de Ricci $R_{ab} = -\lambda^2(d-1)\eta_{ab}$

[1] Ver Cap. 6 de *Field theory a modern primer*, Ramond y Cap. 22 de *QFT and critical phenomena*, Zinn-Justin y sect.3.8 *QFT in curved spacetime*, Birrell and Davies

[2] La TLL, dependientes de $\frac{1}{2}d(d-1)$ parámetros independientes, resuelven la discrepancia entre el número de g.l de la métrica $\frac{1}{2}d(d+1)$ y los g.l. de la tétrada d^2.