Práctica 5: Potenciales y Campos retardados, Radiación

1. Encuentre los campos, y las distribuciones de carga y de corriente correspondientes a

$$V(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q\,t}{r^2}\hat{\mathbf{r}}.$$

2. ¿Los potenciales del problema anterior están en el gauge de Coulomb o en el de Lorentz? (Eventualmente observe que estos gauges no son mutuamente excluyentes).

3. Por un segmento de cable en forma de espira como muestra la Figura 1 pasa una corriente que aumenta linealmente con el tiempo:

$$I(t) = k\,t$$

Calcule el potencial retardado $\mathbf{A}$ en el centro. Encuentre el campo eléctrico en el centro. ¿Por qué este cable (neutro) produce un campo *eléctrico*? (¿Por qué no se puede determinar el campo *magnético* a partir de la expresión para $\mathbf{A}$?)

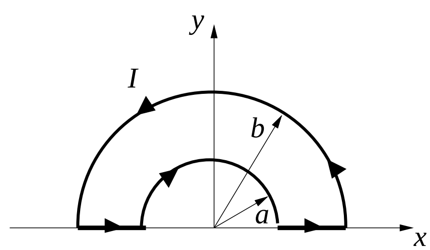

Figura 1

4. Suponga que $\mathbf{J}(\mathbf{r})$ es constante en el tiempo y entonces (ver Problema 7.55 del Griffiths) resulta $\rho(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, 0) + \dot{\rho}(r, 0)\,t$. Muestre que

$$E(r, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(r', t)}{\mathscr{r}^2}\,\hat{\mathscr{r}}dV';$$

o sea, la ley de Coulomb se aplica con la densidad de carga evaluada en el tiempo *no retardado*.

5. Suponga que la densidad de corriente varía de forma suficientemente lenta para que se pueda (en buena aproximación) ignorar todas las derivadas de orden superior en el desarollo de Taylor:

$$\mathbf{J}(t_r) = \mathbf{J}(t) + (t_r - t)\,\dot{\mathbf{J}}(t) + \cdots$$

(para mayor claridad se suprimió la dependencia en $\mathbf{r}$ ya que no entra en juego en este desarrollo). Muestre que una cancelación fortuita en la ecuación 10.31 del libro de Griffiths resulta en

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t) \times \hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}}{\mathscr{r}^2} dV'.$$

O sea, la ley de Biot-Savart se aplica con $\mathbf{J}$ evaluada en un tiempo *no retardado*. Esto significa que la aproximación casi-estática es, de hecho, mucho mejor de lo que podríamos esperar: los dos errores involucrados (despreciar el retardo y eliminar el segundo término de la ecuación 10.31 mencionada anteriormente) se cancelan a primer orden.

6. Encuentre los potenciales V y $\mathbf{A}$ en el gauge de Lorentz para una carga puntual que se mueve a velocidad constante.

7. Una partícula de carga q se mueve en un circunferencia de radio a con una velocidad angular constante ω. (Asuma que la circunferencia está contenida en el plano xy, centrada en el origen, y en el tiempo $t = 0$ la carga está en $(a, 0)$, sobre el eje x positivo.) Encuentre los potenciales de Liénard-Wiechert para puntos en el eje z.

8. Suponga que una carga puntual q está restringida a moverse a lo largo del eje x. Muestre que los campos en puntos del eje *a la derecha* de la carga están dados por

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\mathscr{r}^2} \left(\frac{c+v}{c-v} \right) \hat{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{B} = 0$$

¿Cuáles son los campos sobre el eje a la izquierda de la carga?

9. Encuentre la resistencia de radiación de un cable que conecta los extremos de un dipolo. (Ésta es la resistencia que tendría la misma pérdida media de potencia - en forma de calor - que el dipolo oscilante que, *de hecho*, emite en forma de radiación.) Muestre que $R = 790(d/\lambda)^2 \Omega$, donde λ es la longitud de onda de la radiación. Para cables con un radio usual y si la distancia entre las cargas del dipolo es $d = 5$ cm, ¿es necesario preocuparse por la contribución de la radiación a la resistencia total?

10. Un electrón es soltado desde el reposo y cae bajo la influencia de la gravedad. ¿Qué fracción de la energía potencial perdida representa la energía radiada en el primer centímetro de la caída?

11. (a) Suponga que un electrón desacelera a ritmo constante a desde una velocidad inicial v_0 hasta llegar a cero. ¿Qué fracción de su energía cinética inicial representa la pérdida por radiación? (El resto es absorbido por el mecanismo, el que sea que es, que mantiene la aceleración constante.) Assuma que $v_0 \ll c$ de tal forma que la fórmula de Larmor pueda ser usada.

(b) Para tener una idea de los números involucrados, suponga que la velocidad inicial es térmica (alrededor de 10^5 m/s) y la distancia que el electrón recorre es 30 Å. ¿Qué se puede concluir sobre las pérdidas por radiación para los electrones en un conductor ordinario?