Núcleos y Partículas Elementales
Práctica 5

Problema 1. Sea $|n\rangle$ un autoestado del operador número de ocupación, $\mathcal{N}|n\rangle = n|n\rangle$, demostrar que:

1. si n = 0 entonces $a|n\rangle = 0$
2. si $n \neq 0$ entonces los estados $a|n\rangle$ y $a^\dagger|n\rangle$ son autoestados de $\mathcal{N}$ con normas $\sqrt{n}$ y $\sqrt{n+1}$ respectivamente, y que
$$\mathcal{N}a|n\rangle = (n-1)a|n\rangle$$
$$\mathcal{N}a^\dagger|n\rangle = (n+1)a^\dagger|n\rangle$$
3. $$a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$$
$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$$
$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}\left(a^\dagger\right)^n|0\rangle$$

Problema 2. Sean los campos complejos $\phi(x)$ y $\phi^\dagger(x)$. A partir de la densidad lagrangiana $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial^\mu\phi^\dagger\partial_\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^\dagger\phi$

1. Encuentra las ecuaciones de movimiento de los campos complejos.
2. Muestra que la transformaci¶on de fase global U(1), definida por
$\phi(x) \to e^{i\alpha}\phi(x)$ y $\phi^\dagger(x) \to e^{-i\alpha}\phi^\dagger(x)$
constituye una invarianza de la densidad lagrangiana y, por lo tanto, de las ecuaciones de movimiento. Determina, usando el teorema de Noether, la corriente conservada correspondiente a esta invarianza (ver siguiente problema).

Problema 3. Considere los campos complejos que se pueden expresar en función de operadores de creación y aniquilación
$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3k}{2\omega_k}(a_k e^{-ik_\mu x^\mu} + b_k^\dagger e^{ik_\mu x^\mu})$$
los cuales cumplen las siguientes relaciones de conmutación
$$[a_k, a_{k'}^\dagger] = [b_k, b_{k'}^\dagger] = 2\omega_k(2\pi)^3\delta(k-k')$$
$$[a_k, a_{k'}] = [b_k, b_{k'}] = [a_k^\dagger, a_{k'^\dagger}] = [a_k, b_{k'}] = ... = 0$$
y construya la corriente
$$j^\mu = i(\phi^\dagger(\partial^\mu\phi) - (\partial^\mu\phi^\dagger)\phi)$$

- Demostrar que $\partial_\mu j^\mu = 0$.
- Mostrar usando el teorema de Gauss que la carga
$$Q = \int d^3r j^0$$
es una cantidad conservada.