



El núcleo y sus radiaciones

clase 5

Departamento de Física, Facultad de Ciencias Exactas - UNLP
Instituto de Física La Plata - CONICET
Calle 49 y 115 La Plata





Velocidad de transformación o Actividad



El número de núcleos que se transforman en un tiempo dt es proporcional a $N(t)$ y dt :

$$\Delta N / \Delta t = -\lambda N$$

$$-dN_A = \lambda_A N_A(t) dt$$

$$N_A(t) = N_{A0} e^{-\lambda t}$$

$$[\lambda] = \text{s}^{-1}$$

λ = constante de desintegración
(probabilidad por unidad de tiempo de que se transforme un núcleo)

λ es característica de cada radionucleido.



Velocidad de transformación o Actividad

❖ **Vida media o período:** velocidad característica a la cual se transforman los núcleos



$$\tau = \lambda^{-1}$$

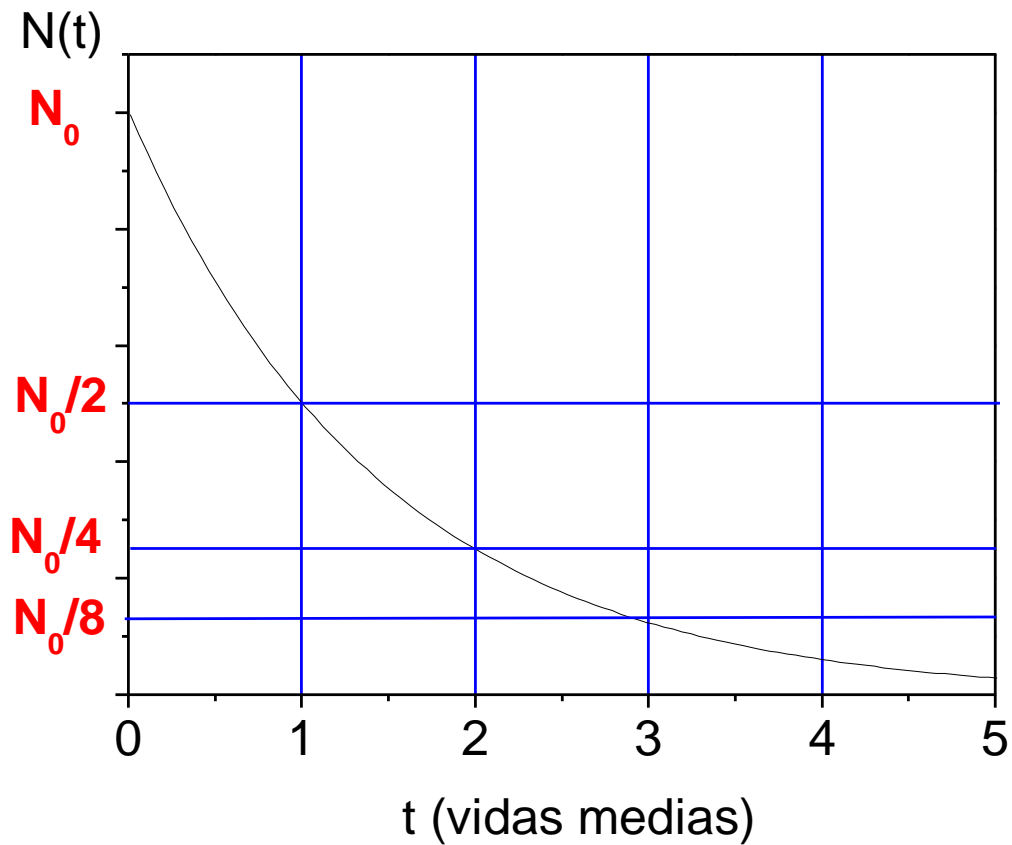
$t_{1/2}$ o semi-vida: tiempo para que el número de átomos radioactivos se reduce a la mitad

$$t_{1/2} = \lambda^{-1} \ln 2 = \lambda^{-1} \mathbf{0,639}$$

❖ Las semividas de los elementos **varían desde una fracción de segundo hasta miles de millones de años**

- el ^{238}U tiene una semivida de 4.500.000.000 años
- el $^{238}\text{Rn}-226$ tiene una semivida de 1.620 años
- el ^{15}C tiene una semivida de 2,4 s

Velocidad de transformación o Actividad



$$N(t) = N_0 \exp(-t / t_{1/2})$$



Velocidad de transformación o Actividad

Algunos radionucleídos decaen por diferentes procesos, cada uno caracterizado por una constante de decaimiento λ_i .

La constante de decaimiento total del radionucleído es:

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \dots$$

$$\text{B.R.} = \lambda_i / \lambda$$

Factor de ramificación ("branching mode") del modo I de decaimiento



Velocidad de transformación o Actividad

$$A = -dN/dt = \lambda N_0 e^{-\lambda t} = A_0 e^{-\lambda t}$$

Tanto A como N disminuyen exponencialmente

$$A(\text{Bq}) = |\Delta N / \Delta t| = \lambda N$$

Unidades

Becquerel: es la cantidad de desintegraciones por segundo

Curie: es el total de desintegraciones producidas por un gramo de ^{226}Ra puro por segundo.

$$1 \text{ Bq} = 1 \text{ desintegración / s}$$

$$1 \text{ Ci} = \text{actividad de 1 g de } ^{226}\text{Ra} \\ (N_A \ln 2) / (226 * 1620 \text{ a} * 365 * 24 * 3600) = 3,7 \times 10^{10} \text{ des/s}$$

$$1 \text{ Ci} = 3,7 \times 10^{10} \text{ Bq}$$



Velocidad de transformación o Actividad

$$A(\text{Ci}) = \lambda N / (3.7 \times 10^{10})$$

Comentario: la actividad de un gr de ^{226}Ra a cambiado con el tiempo. El valor actual es $3,656 \times 10^{10}$ des/s . Sin embargo, el factor de conversión se ha fijado en $3,700 \times 10^{10}$ des/s.

Actividades típicas en Medicina Nuclear: MBq-GBq (10s de μCi - 10s de mCi).

10s de GBq (Ci) en ciertos suministros.

Fuentes de irradiación externa (e.g., terapias con ^{60}Co) 1000s de GBq (1000 GBq = 1 TBq)

En el otro extremo, los equipos con mayor sensibilidad pueden detectar actividades del orden del Bq (nCi).

Factor de decaimiento.

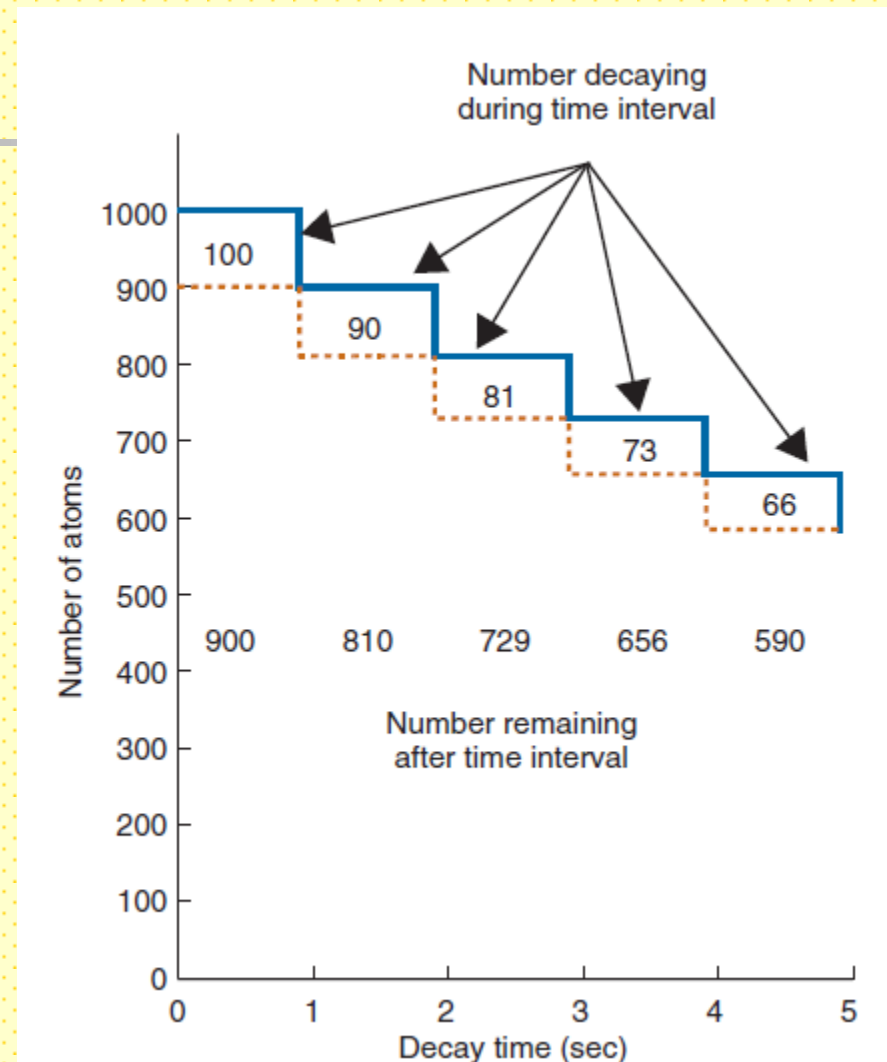
Tanto A como N disminuyen exponencialmente con el tiempo.

$$N(t) = N(0) e^{-\lambda t}$$

$$A(t) = A(0) e^{-\lambda t}$$

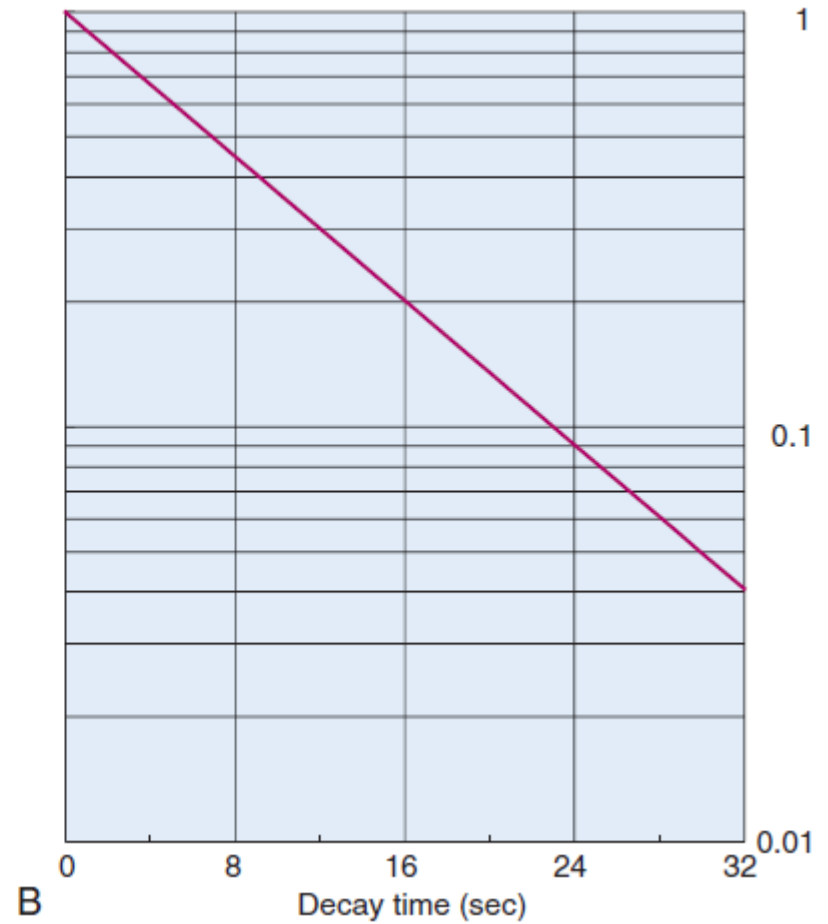
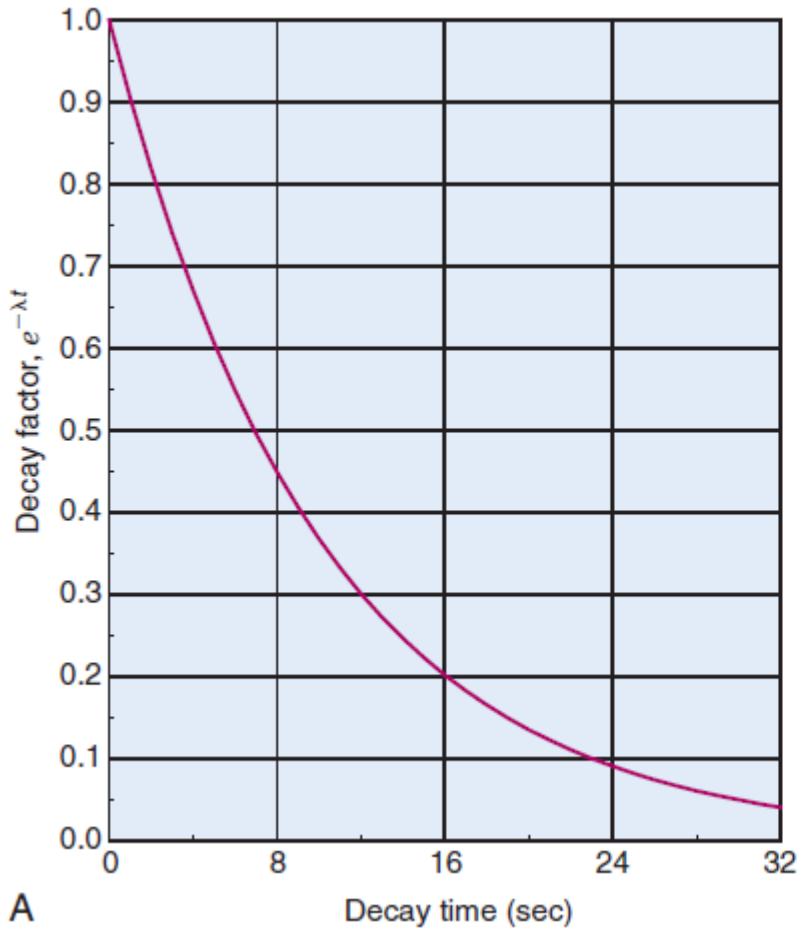
$$DF = e^{-\ln 2 \times t / T_{1/2}}$$

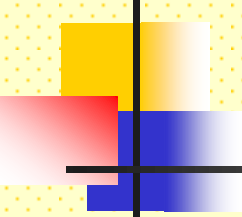
Factor de decaimiento ("decay factor, DF).



Decaimiento de un radionucleido cada un segundo caracterizada por $\lambda=0.1 \text{ s}^{-1}$.

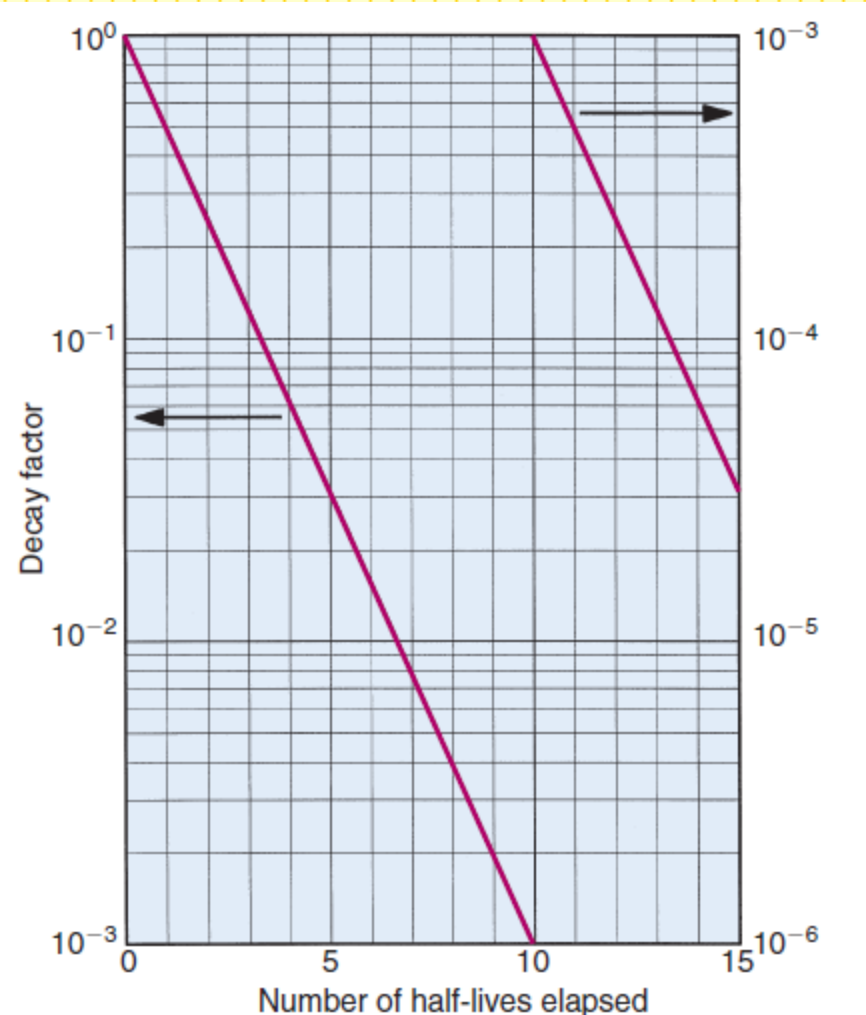
Factor de decaimiento.





Factor de decaimiento.

Curva universal de decaimiento.





Factor de decaimiento.

Hours	Minutes			
	0	15	30	45
0	1.000	0.972	0.944	0.917
1	0.891	0.866	0.841	0.817
2	0.794	0.771	0.749	0.727
3	0.707	0.687	0.667	0.648
4	0.630	0.612	0.595	0.578
5	0.561	0.545	0.530	0.515
6	0.500	0.486	0.472	0.459
7	0.445	0.433	0.420	0.408
8	0.397	0.385	0.375	0.364
9	0.354	0.343	0.334	0.324
10	0.315	0.306	0.297	0.289
11	0.281	0.273	0.264	0.257
12	0.250	0.243	0.236	0.229



Factor de decaimiento.

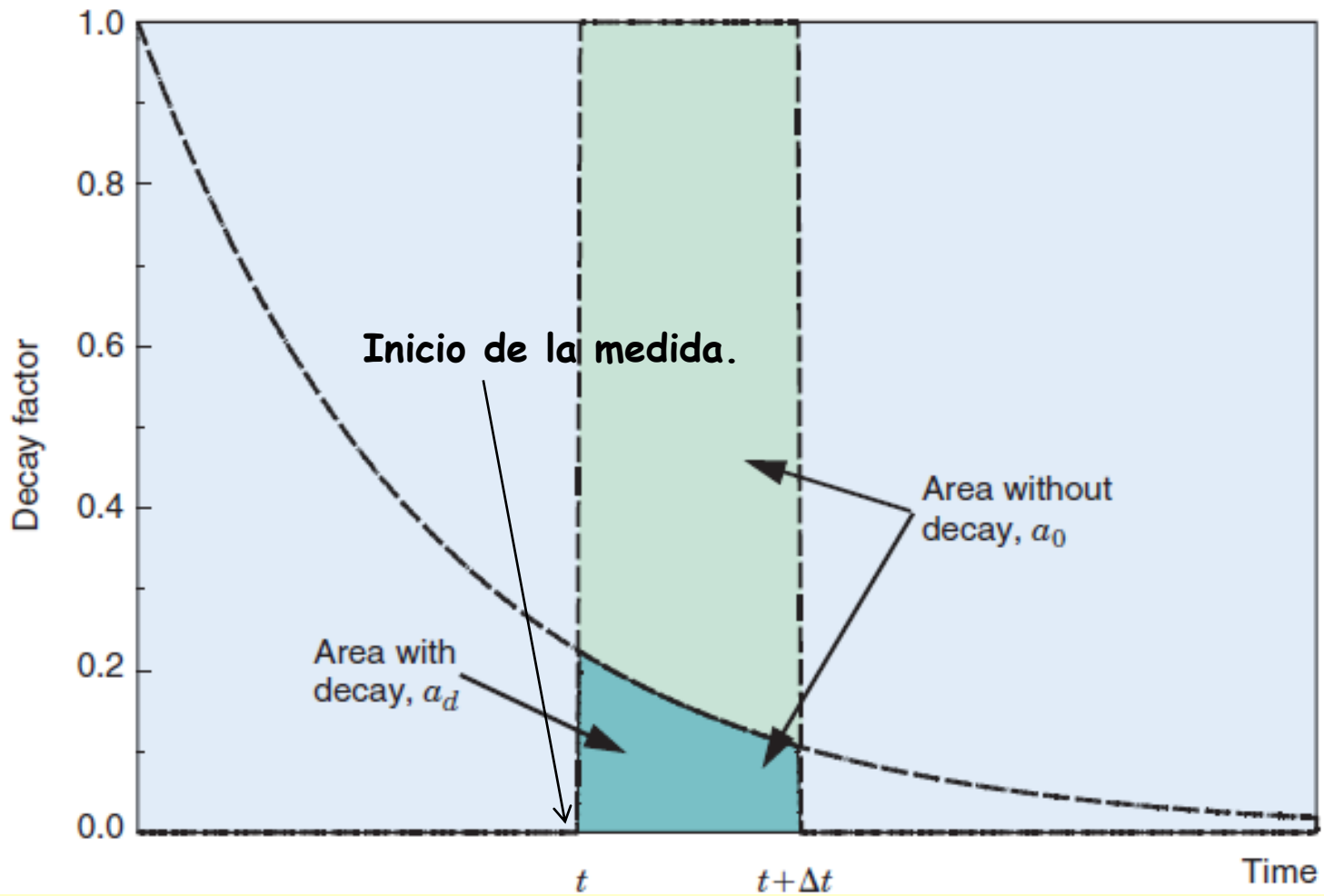
Corrección de imágenes médicas por el factor de decaimiento.

En algunas aplicaciones médicas (y fuera de la medicina), se adquieren datos durante períodos que no son cortos en comparación con la vida media del radionúclido.

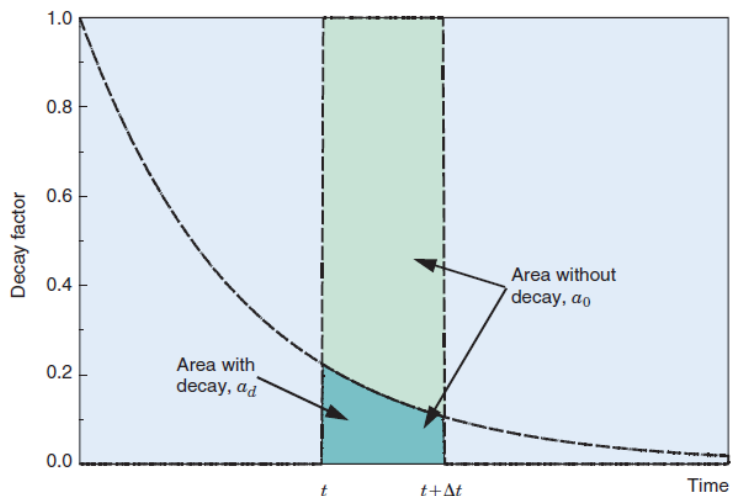
Ejemplo: medición del metabolismo de la glucosa mediante desoxiglucosa marcada con ^{18}F .

Como las medidas son tomadas en imágenes en función del tiempo, se debe tener en cuenta el decaimiento del marcador radiactivo.

Factor de decaimiento.



Factor de decaimiento.

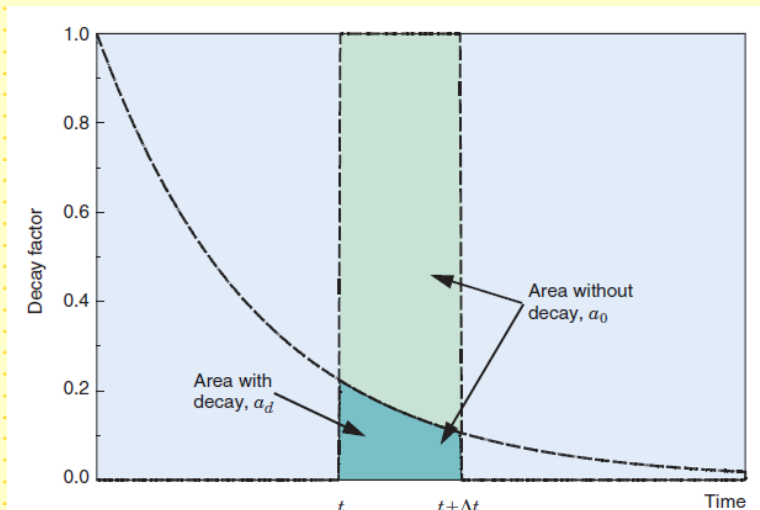


$$\begin{aligned} DF_{\text{eff}}(t, \Delta t) &= a_d / a_0 \\ &= e^{-(\ln 2 \times t / T_{1/2})} \times [(1 - e^{-x}) / x] \\ &= DF(t) \times [(1 - e^{-x}) / x] \end{aligned}$$

$$x = \ln 2 \times \Delta t / T_{1/2}$$

Para corregir el número de cuentas debido al decaimiento en el tiempo $t + \Delta t$ se debe multiplicar por la inversa de DF_{eff} .

Factor de decaimiento.



DF al tiempo que comenzó la medida.

$$DF_{\text{eff}}(t, \Delta t) = DF(t) \times [(1 - e^{-x}) / x]$$

Depende de Δt .

$$DF_{\text{eff}}(t, \Delta t) \approx DF(t) \times [1 - (x/2)]$$

$$x < 0.25 \text{ (1\%)}$$

$$DF_{\text{eff}}(t, \Delta t) \approx DF[t + (\Delta t/2)]$$

$$x < 0.5 \text{ (1\%)}$$

$$DF_{\text{eff}}(t, \Delta t) \approx \frac{DF(t) + DF(t + \Delta t)}{2}$$

$$x < 0.35 \text{ (1\%)}$$

Importante! $t=0$ NO es el tiempo en que comenzó la medida. Es el tiempo al que se conocía la actividad del radiomarcador.

Para determinar el decaimiento durante la medida se debe usar el segundo término.



Actividad específica.

Una muestra radiactiva puede contener, además del isótopo de interés, el isótopo estable.
Portador - Muestra con portador («carrier», «with carrier»).

Si no contiene el (los) isótopo(s) estable(s), libre de portadores («carrier-free»).

(que la muestra contenga o no portadores depende del método de producción del isótopo).

$$SA = \frac{A}{m} \quad \left(\frac{Bq}{g}\right)$$

La máxima actividad que puede tener una muestra es en el caso que no existan portadores
(«carrier-free specific activity», CFSA)



Actividad específica.

1 gr de muestra (^AX). Asumiremos peso atómico = $\sim A$)

Carrier-free

Vida media $T_{1/2}$

A gr de muestra contiene 6.023×10^{23} átomos.

1 gr contiene $N = 6.023 \times 10^{23} / A$ átomos

$$\Delta N / \Delta t \text{ (dps)} = \lambda N = 0.693 N / T_{1/2}$$

$$A \text{ (Bq/g)} \approx \ln 2 \times 6.023 \times 10^{23} / (A \times T_{1/2})$$

$$\text{CFSA (Bq/g)} \approx 4.8 \times 10^{18} / (A \times T_{1/2})$$

Donde $T_{1/2}$ se expresa en días (1 día = 86400 s).



Actividad específica.

$$\text{CFSA (Bq/g)} \approx 4.8 \times 10^{18} / (A \times T_{1/2})$$

$$\begin{aligned} \text{CFSA (Bq/mole)} &= \text{CFSA (Bq/g)} \times A \text{ (g/mole)} \\ &\approx 4.8 \times 10^{18} / T_{1/2} \end{aligned}$$

$$\text{CFSA (Ci / g)} \approx 1.3 \times 10^8 / (A \times T_{1/2})$$

$$\text{CFSA (Ci / mole)} \approx 1.3 \times 10^8 / T_{1/2}$$

Ejemplo. Actividad específica del ^{131}Tc y del $^{99\text{m}}\text{Tc}$.

$$\begin{aligned} \text{CFSA } (^{131}\text{I}) &\approx \frac{(4.8 \times 10^{18})}{(1.31 \times 10^2 \times 8)} \\ &\approx 4.6 \times 10^{15} \text{ Bq/g} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{CFSA } (^{99\text{m}}\text{Tc}) &\approx \frac{(4.8 \times 10^{18})}{(0.99 \times 10^2 \times 0.25)} \\ &\approx 2.5 \times 10^{17} \text{ Bq/g} \end{aligned}$$



Actividad específica.

Las CFSA de radioisótopos con vidas medias de días o unas pocas semanas son muy altas. Muchos de los radioisótopos empleados en Medicina Nuclear se encuentran en este rango.

Esto es importante, ya que una moderada dosis de actividad implica poca más del radiofármaco, por lo tanto, no provoca reacciones adversas.

0.4 MBq ($\sim 10 \mu\text{Ci}$) de ^{131}I corresponden a unos 10^{-10} g of I.

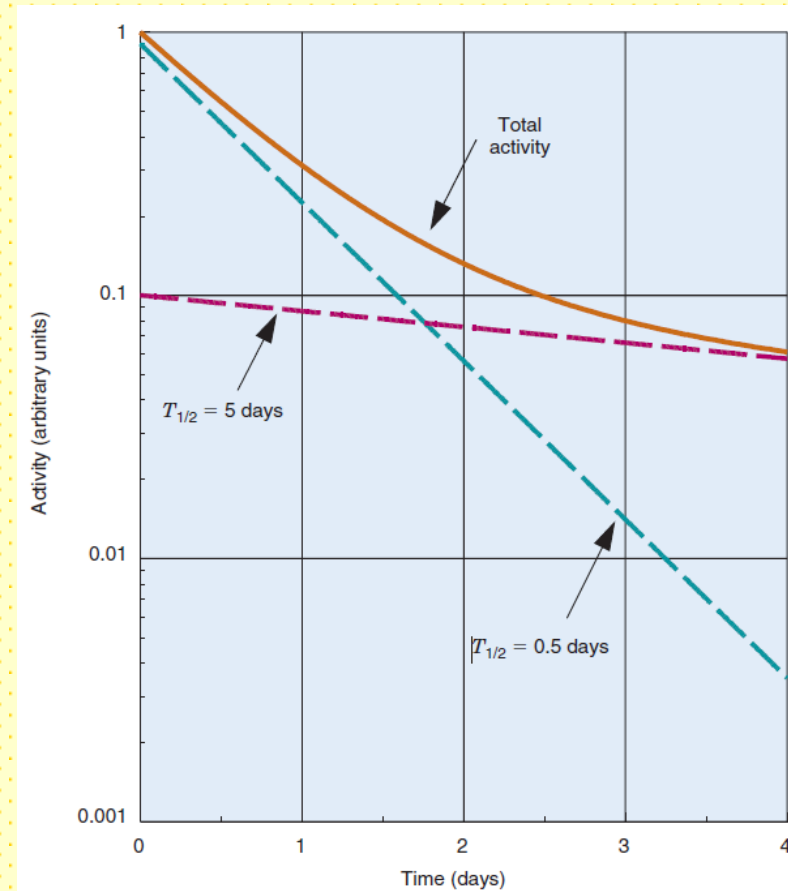
No es posible obtener $^{99\text{m}}\text{Tc}$ porque no se puede separar de su producto, ^{99}Tc , que presenta una vida muy larga y es esencialmente el isótopo estable del Tc. (la masa de Tc en la mayoría de las preparaciones de $^{99\text{m}}\text{Tc}$ es muy pequeña y no tiene efecto fisiológico cuando se administra a un paciente).

Decaimiento en muestras formadas por varios nucleidos.

Hasta aquí se consideraron muestras compuestas por un único radionucleido.

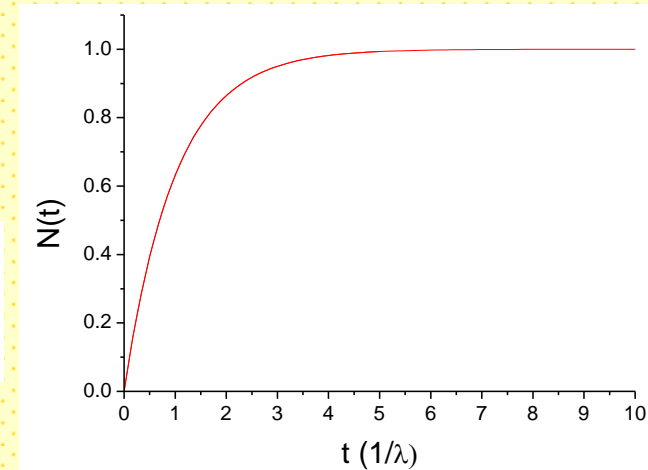
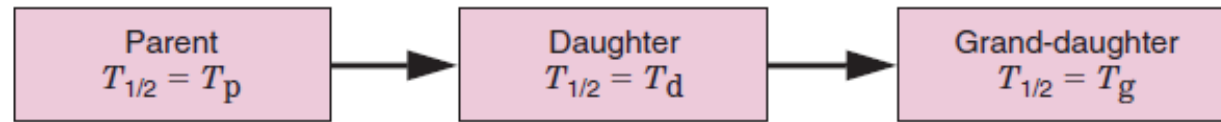
Cuando la muestra contiene una mezcla de radionucleidos no correlacionados (no hay relación padre/hijo), la actividad total es la suma de las actividades individuales:

$$A_t(t) = A_1(0)e^{-0.693t/T_{1/2,1}} + A_2(0)e^{-0.693t/T_{1/2,2}} + \dots$$



Decaimiento en muestras formadas por varios nucleidos.

Decaimientos en cadena. Ecuaciones de Bateman.

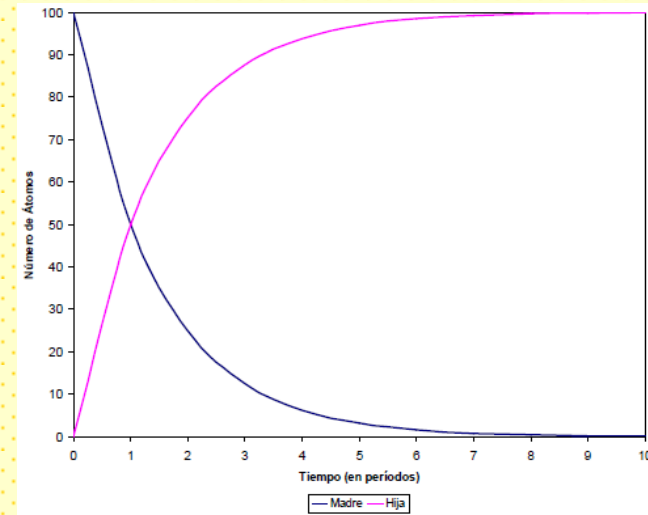


Supongamos que el hijo (B) es estable.
Este nucleido es producido a *velocidad constante*

$$dN_B(t)/dt = \lambda_A N_A$$

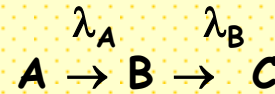
$$\text{Si } N_B(t=0) = 0 \rightarrow N_B(t) = N_{A0}(1 - e^{-\lambda_A t})$$

$$N_A(t) + N_B(t) = \text{cte} = N_{A0}$$



Decaimiento en muestras formadas por varios nucleidos.

Y si B es inestable y decae a C (estable)

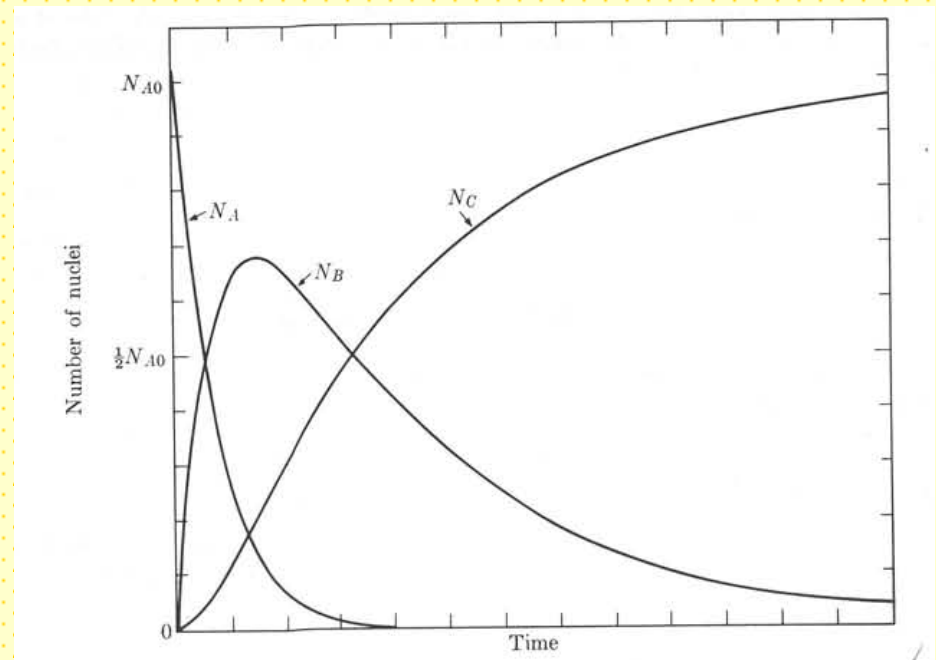


$$\frac{dN_A}{dt} = -\lambda_A N_A,$$

$$\frac{dN_B}{dt} = \lambda_A N_A - \lambda_B N_B$$

$$N_B = \frac{\lambda_A}{\lambda_B - \lambda_A} N_{A0} (e^{-\lambda_A t} - e^{-\lambda_B t}).$$

$$\frac{dN_B}{dt} = \lambda_A N_{A0} e^{-\lambda_A t} - \lambda_B N_B.$$



Donde hemos supuesto que inicialmente sólo existían átomos del tipo A. Si no fuera así, deberíamos sumar un término.



Decaimiento en muestras formadas por varios nucleidos.

Cuando hay inicialmente una cierta cantidad de B presente:

$$N_B = \frac{\lambda_A}{\lambda_B - \lambda_A} N_{A0}(e^{-\lambda_A t} - e^{-\lambda_B t}).$$



$$N_B(t) = \frac{\lambda_A}{\lambda_B - \lambda_A} N_{A0}(e^{-\lambda_A t} - e^{-\lambda_B t}) + N_{B0}e^{-\lambda_B t}$$

Ecuación general.

Dado que $A(t) = \lambda N(t)$ y $\lambda = \ln 2 / T$ podemos expresar la actividad:

$$A_B(t) = \frac{T_A}{T_B - T_A} A_{A0}(e^{-\ln(2)t/T_A} - e^{-\ln(2)t/T_B})$$

Decaimiento en muestras formadas por varios nucleidos.

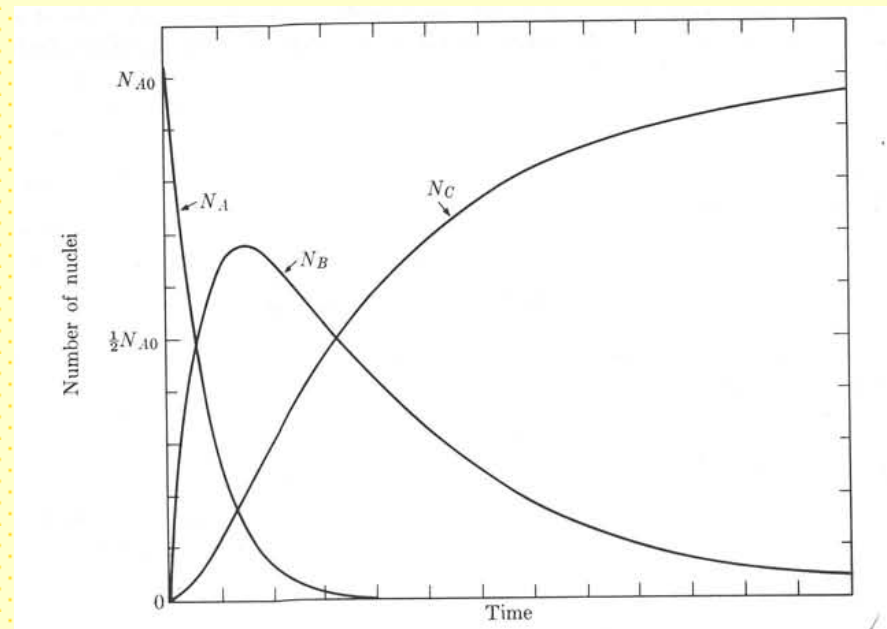
$$N_B = \frac{\lambda_A}{\lambda_B - \lambda_A} N_{A0}(e^{-\lambda_A t} - e^{-\lambda_B t}).$$

Debe existir un máximo de N_B entre 0 e ∞ .
Matemáticamente corresponde al punto en que

$$\frac{dN_B(t)}{dt} = 0$$

Derivando y resolviendo se obtiene:

$$t_{max} = \frac{1}{\lambda_B - \lambda_A} \ln \frac{\lambda_B}{\lambda_A}$$



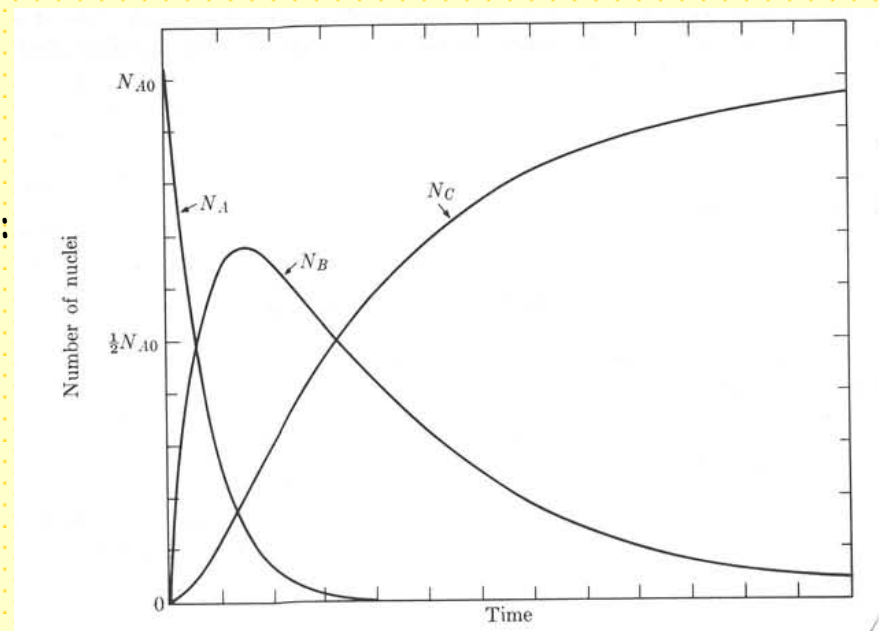
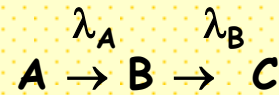
Decaimiento en muestras formadas por varios nucleidos.

Actividad total del sistema:

$$A_{\text{total}}(t) = A_A(t) + A_B(t)$$

Actividad del hijo luego de separarse del sistema:

$$A_B(t) = A_B(t \text{ separación})e^{-\lambda_B t}$$



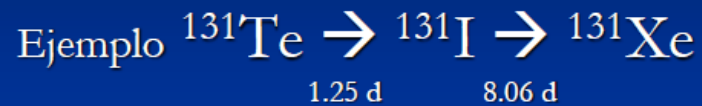


Decaimiento en muestras formadas por varios nucleidos.

Casos

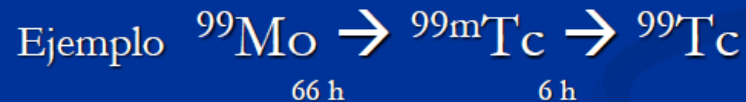
$$T_A < T_B$$

No se llega al equilibrio



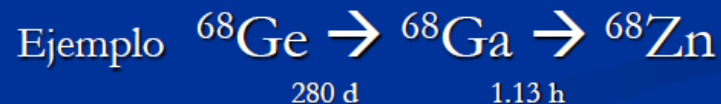
$$T_A > T_B$$

Equilibrio transitorio



$$T_A \gg T_B$$

Equilibrio secular



Decaimiento en muestras formadas por varios nucleidos.

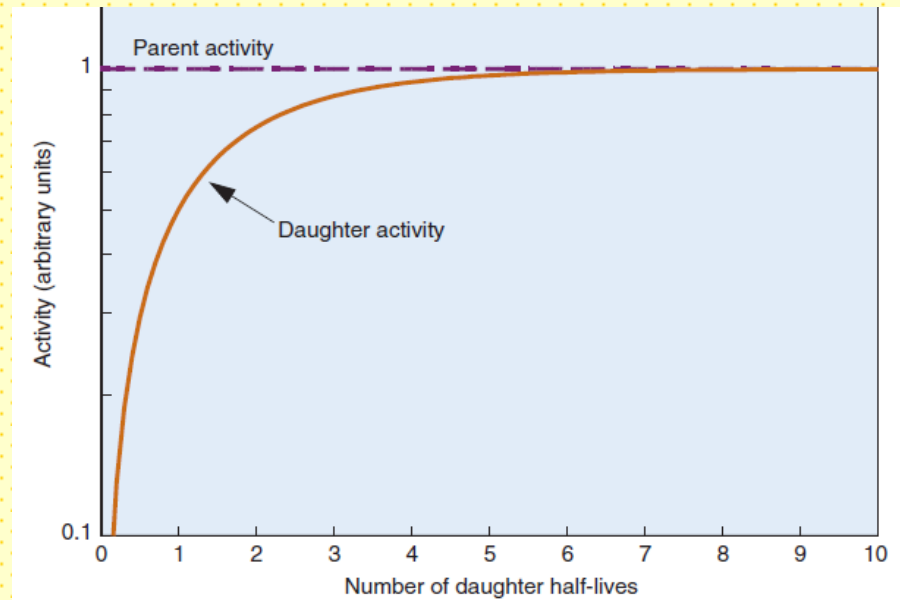
$$A_d(t) = \left\{ \left[A_p(0) \frac{\lambda_d}{\lambda_d - \lambda_p} \times (e^{-\lambda_p t} - e^{-\lambda_d t}) \right] \times \text{B.R.} \right\} + A_d(0)e^{-\lambda_d t}$$

$T_A \gg T_B$ Equilibrio secular

^{226}Ra ($T_p = 1620$ yr) \rightarrow ^{222}Rn ($T_d = 4.8$ days)

$T_A > 100 T_B$
podemos suponer entonces $\lambda_p \approx 0$, con lo cual

$$A_d(t) \approx A_p(0)(1 - e^{-\lambda_d t}) \times \text{B.R.}$$

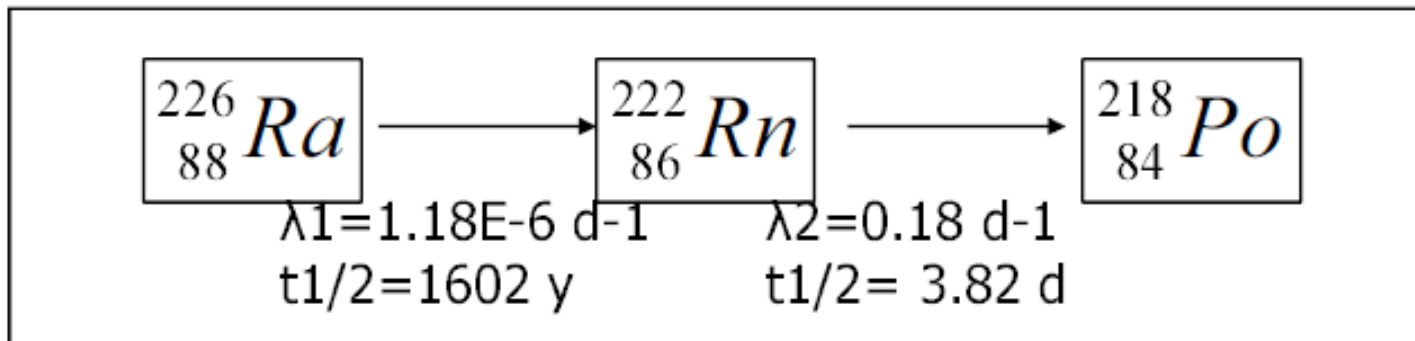


$$A_B(t) = \lambda_A N_{A0} = A_{0A}$$

La actividad del hijo y del padre, para tiempos suficientemente largos ($t > 4-5 \lambda_B$) son iguales.

Decaimiento en muestras formadas por varios nucleidos.

Ejemplo de equilibrio secular



La actividad tiende a una constante de modo que

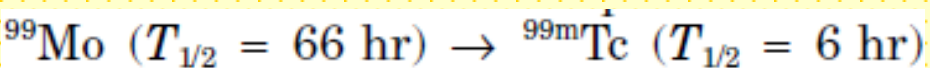
$$\frac{\lambda_2 N_2}{\lambda_1 N_1} \approx \frac{\lambda_1 A}{\lambda_1} \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} = 1.000007$$

La actividad debida a la desintegración de radón estará asociada a la actividad debida al radio en proporción de igualdad.

Decaimiento en muestras formadas por varios nucleidos.

$$A_d(t) = \left\{ \left[A_p(0) \frac{\lambda_d}{\lambda_d - \lambda_p} \times (e^{-\lambda_p t} - e^{-\lambda_d t}) \right] \times \text{B.R.} \right\} + A_d(0)e^{-\lambda_d t}$$

$T_A > T_B$ Equilibrio transitorio

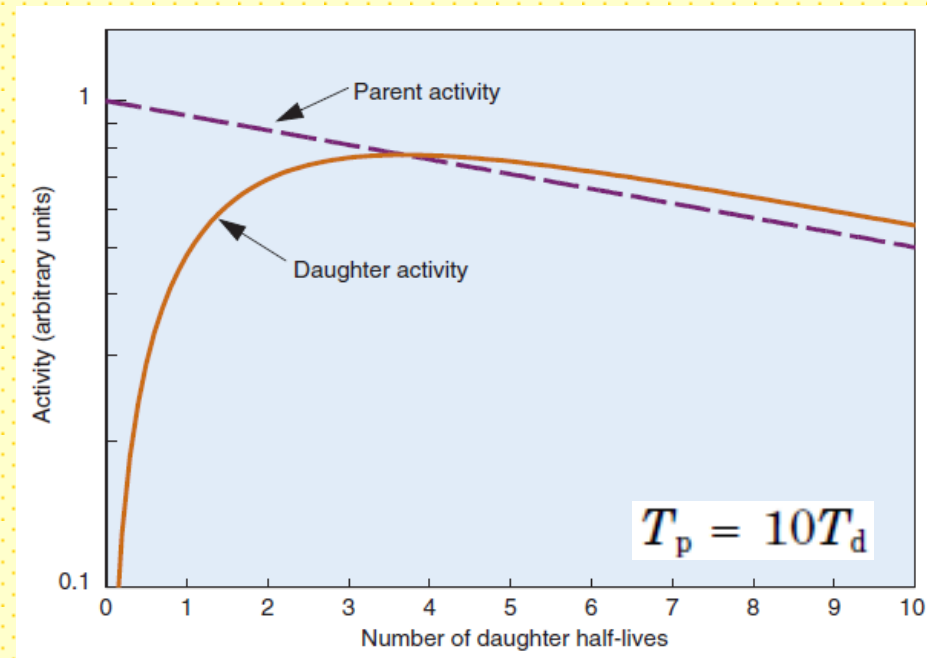


Para tiempos suficientemente largos:

$$A_d/A_p = [T_p/(T_p - T_d)] \times \text{B.R.}$$

El tiempo para el cual la actividad de B es máxima es:

$$t_{\max} = [1.44T_p T_d / (T_p - T_d)] \ln(T_p / T_d)$$



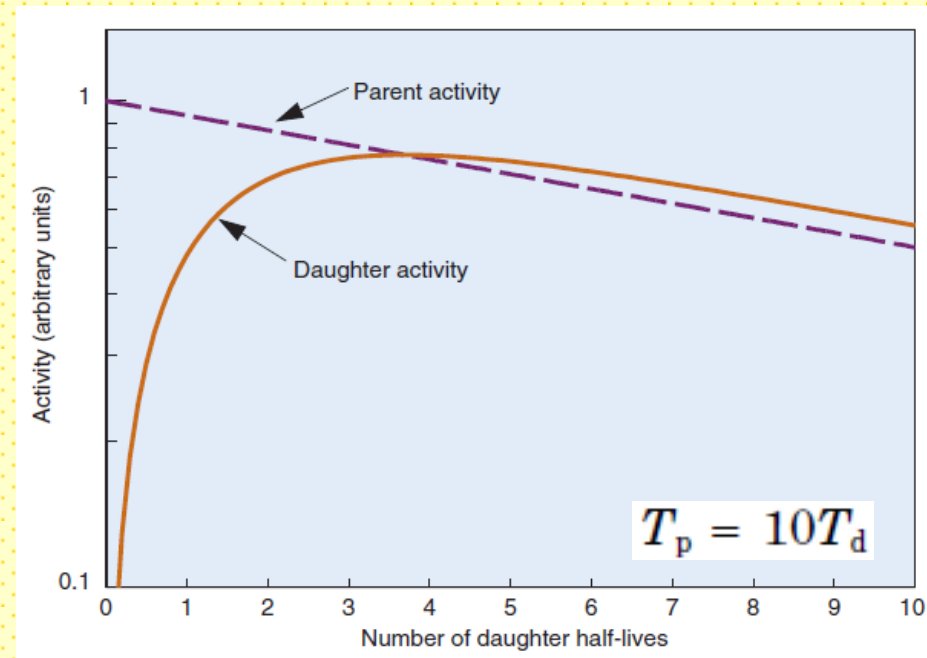
Decaimiento en muestras formadas por varios nucleidos.



La curva es similar, pero ahora B.R. ${}^{99}\text{Mo} = 0.876$.

Una fracción de los núcleos de ${}^{99}\text{Mo}$ decae al estado fundamental del ${}^{99}\text{Tc}$.

Por lo tanto, la actividad del ${}^{99m}\text{Tc}$ es menor en un factor



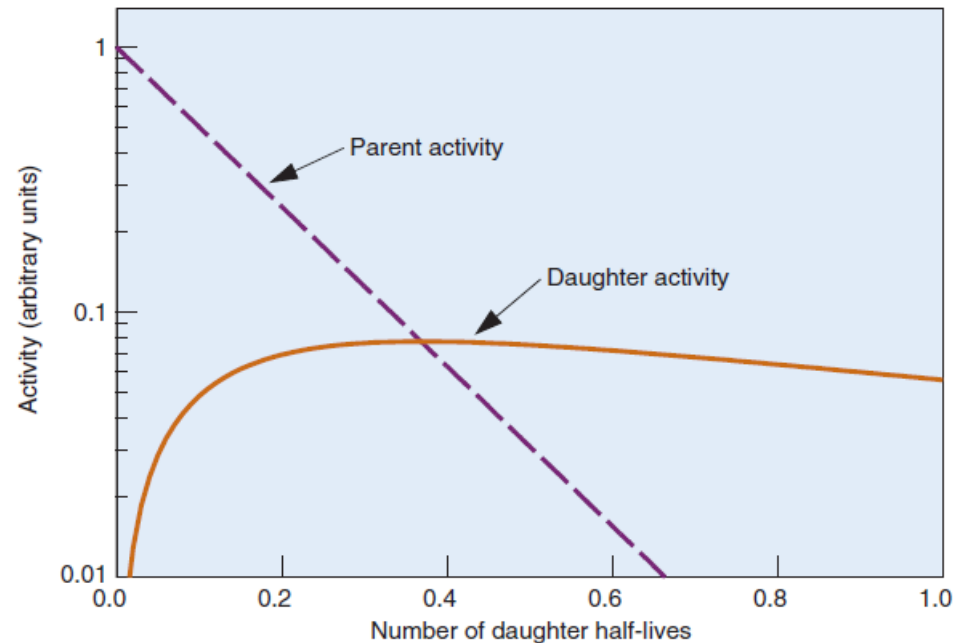
Decaimiento en muestras formadas por varios nucleidos.

$$A_d(t) = \left\{ \left[A_p(0) \frac{\lambda_d}{\lambda_d - \lambda_p} \times (e^{-\lambda_p t} - e^{-\lambda_d t}) \right] \times \text{B.R.} \right\} + A_d(0)e^{-\lambda_d t}$$

$$T_A < T_B$$

No se llega al equilibrio

En este caso no puede alcanzarse un equilibrio entre el padre y el hijo. La relación de actividades de B a A se incrementa con t, llega a un máximo y después comienza a disminuir

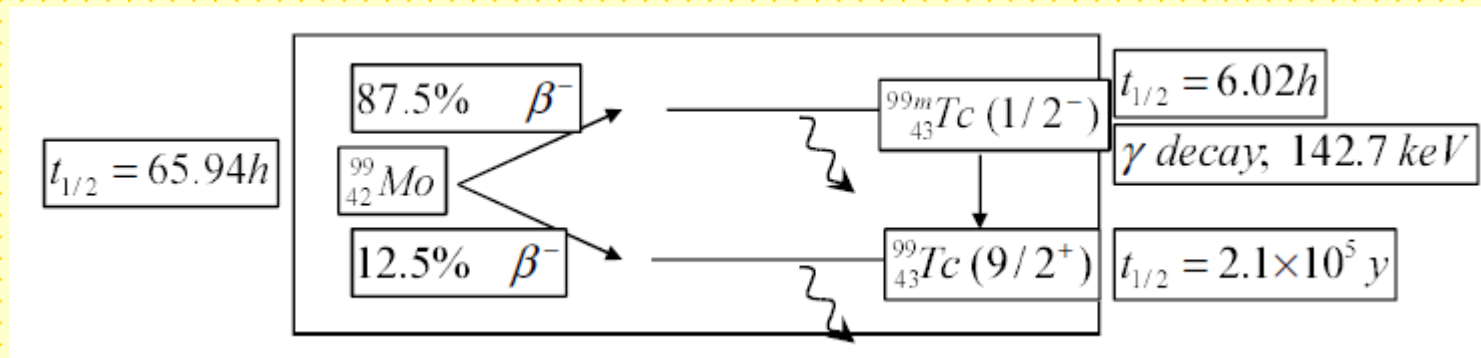


Decaimiento en muestras formadas por varios nucleidos.

Un radioisótopo puede tener diferentes modos de desintegración a varios núcleos hijo. Entonces la constante de desintegración se puede escribir como suma de constantes de desintegración

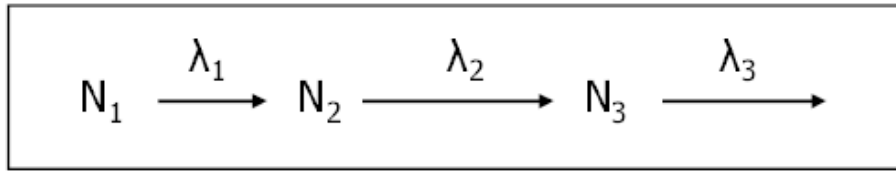
$$-\frac{dN}{dt} = \lambda N \quad \longrightarrow \quad \lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \dots$$
$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} + \frac{1}{\tau_3} + \frac{1}{\tau_4} + \dots$$

A las constantes λ_i se las denomina **constantes de desintegración parciales**.



Decaimiento en muestras formadas por varios nucleidos.

Si consideramos una reacción en cadena de desintegración (single daughter)



Las ecuaciones diferenciales para cada población N_i serán

$$\frac{dN_i}{dt} = \lambda_{i-1}N_{i-1} - \lambda_i N_i \quad i=1,2,3,\dots$$

Si consideramos que en el instante inicial sólo existe el radioisótopo N_1 , una solución general está dada por las ecuaciones de Bateman, donde la actividad del isótopo i -ésimo está caracterizada por las constantes de desintegración de sus predecesores

$$\lambda_i N_i = N_1(t=0) \times \sum_{m=1}^i C_m e^{-\lambda_m t}$$

$$C_m = \frac{\prod_{k=1}^i \lambda_k}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq m}}^i (\lambda_k - \lambda_m)} = \frac{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_i}{(\lambda_1 - \lambda_m)(\lambda_2 - \lambda_m) \dots (\lambda_i - \lambda_m)}$$

Decaimiento en muestras formadas por varios nucleidos.

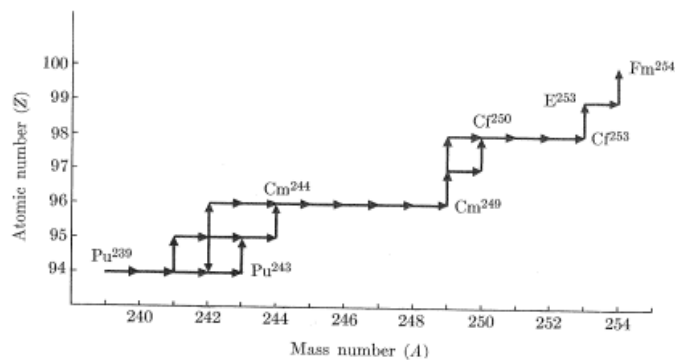


FIG. 12-2. Nuclear reaction sequences for production of heavy nuclides by intense slow neutron irradiation of Pu^{239} . (From Seaborg, *The Transuranium Elements*, gen. ref.).

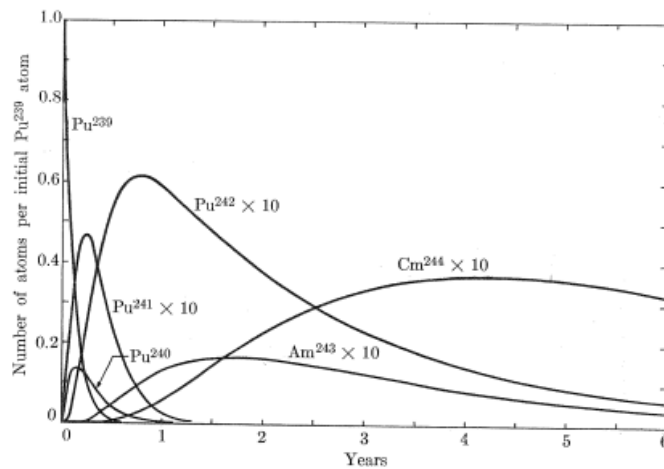


FIG. 12-3. Production of some heavy nuclides by irradiation of Pu^{239} at a flux of 3×10^{14} neutrons/cm²/sec (from Seaborg, *The Transuranium Elements*, gen. ref.).



Ejemplo de aplicación del equilibrio: generadores.

Un generador de radionucleidos consiste en un par padre radiactivo - hijo contenido en un aparato que permite la separación y extracción del hijo.

La actividad del hijo se repone continuamente por el decaimiento del padre y puede ser extraído repetidamente

Daughter*	Decay Mode	$T_{1/2}$	Parent	$T_{1/2}$
^{62}Cu	β^+ ,EC	9.7 min	^{62}Zn	9.3 hr
^{68}Ga	β^+ ,EC	68 min	^{68}Ge	271 d
^{82}Rb	β^+ ,EC	1.3 min	^{82}Sr	25 d
$^{87\text{m}}\text{Sr}$	IT	2.8 hr	^{87}Y	80 hr
$^{99\text{m}}\text{Tc}$	IT	6 hr	^{99}Mo	66 hr
$^{113\text{m}}\text{In}$	IT	100 min	^{113}Sn	120 d

El mas importante es ^{99}Mo - $^{99\text{m}}\text{Tc}$ debido a sus aplicaciones en el campo de imágenes médicas.

$^{99\text{m}}\text{Tc}$ emite rayos γ de 140 keV y tiene una vida media adecuada (6 h) y se lo puede usar como marcador de muchos agentes.

Requerimiento mundial: 1850 TBq (50000 Ci) de ^{99}Mo por semana para uso en prácticas médicas.

Por su corta vida media, no se puede obtener el $^{99\text{m}}\text{Tc}$ y distribuirlo. Por eso se emplea el generador a partir del ^{99}Mo .

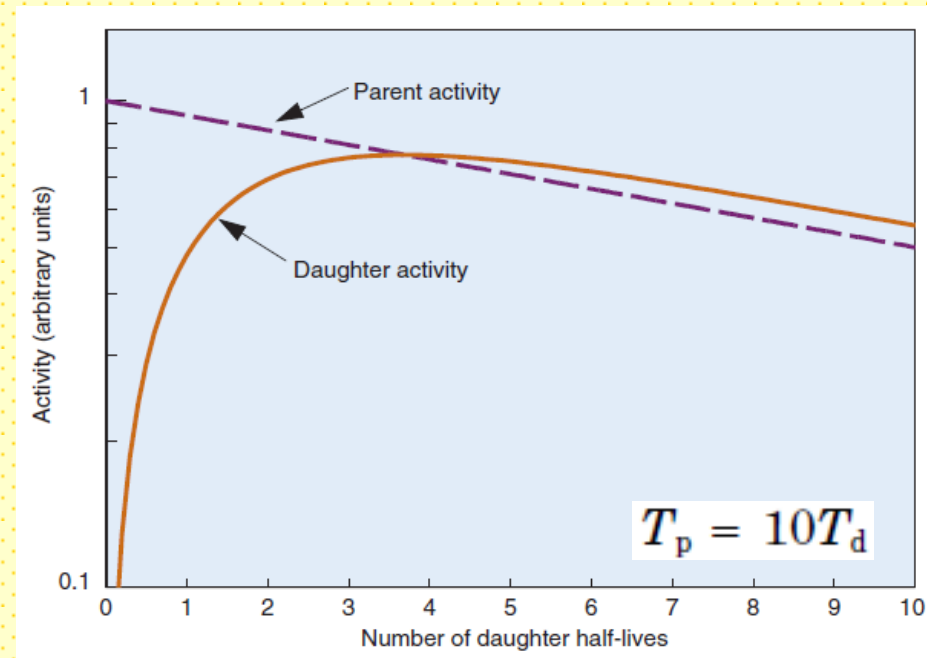
Ejemplo de aplicación del equilibrio: generadores.

El decaimiento $^{99}\text{Mo} \rightarrow ^{99\text{m}}\text{Tc}$ (par padre radiactivo-hijo) es un ejemplo de equilibrio transiente.

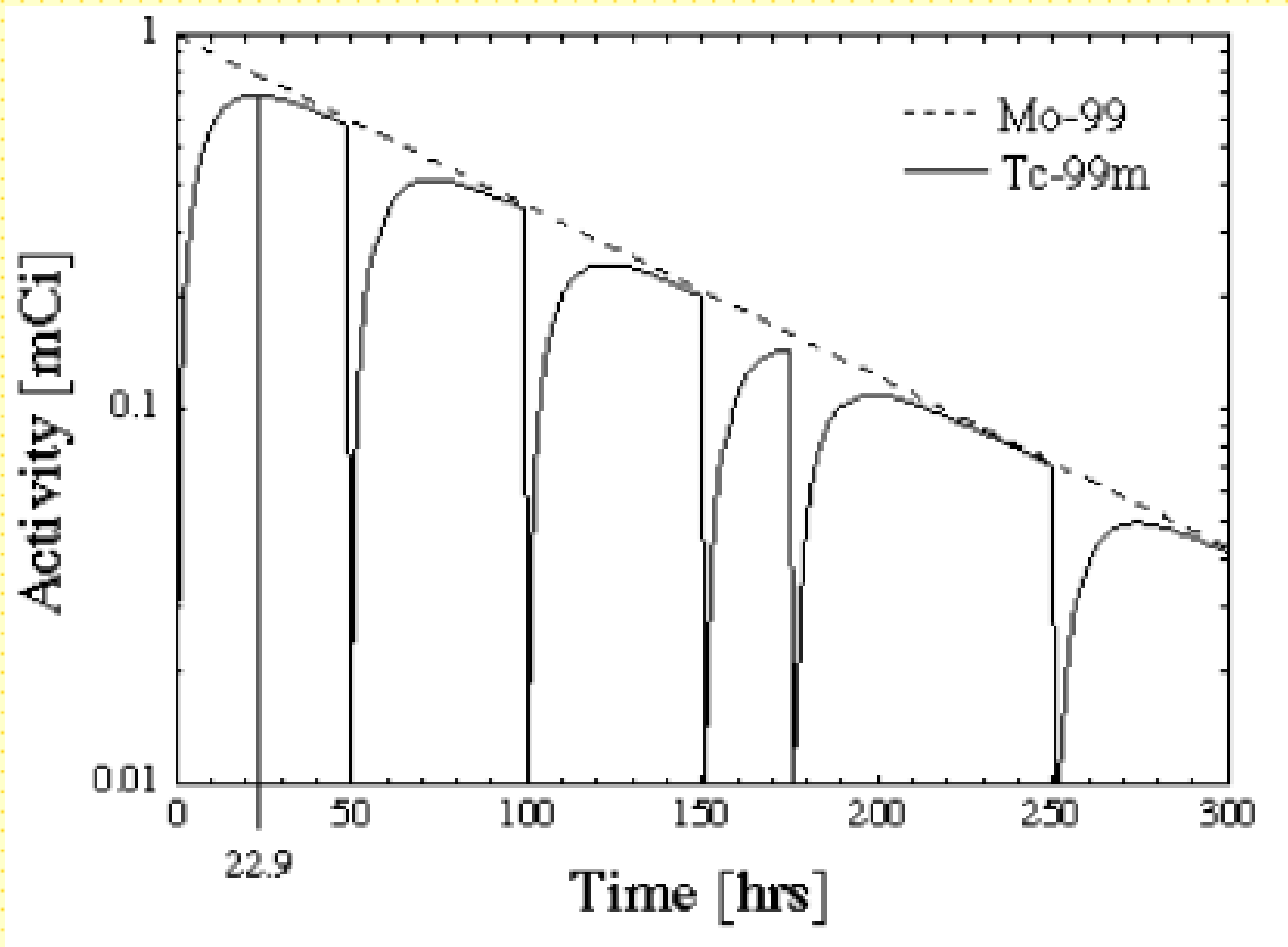
En condiciones ideales, y con un B.R. = 0.876,

$$A(^{99\text{m}}\text{Tc})/A(^{99}\text{Mo}) = 0.96$$

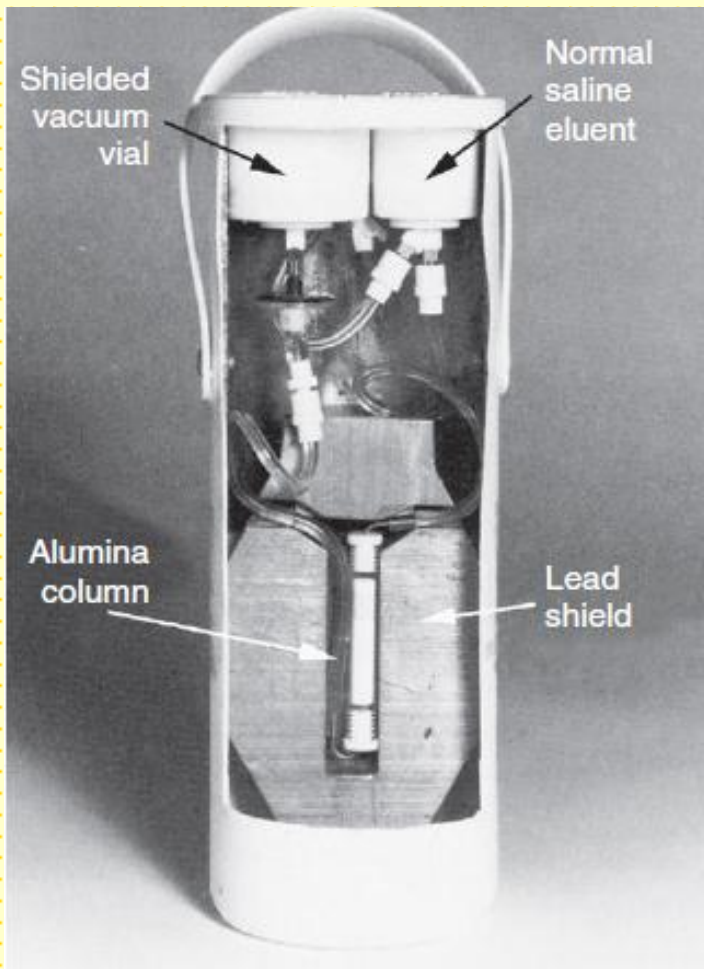
El tiempo para el cual la actividad de $^{99\text{m}}\text{Tc}$ es máximo luego de una elución es 23 hs. (actividades utilizables para estudios pueden obtenerse luego de 3-6 hs de la elución).



Ejemplo de aplicación del equilibrio: generadores.



Ejemplo de aplicación del equilibrio: generadores.



El padre radioactivo, ^{99}Mo se coloca (en forma MoO_4^{2-}) en una columna de alúmina (Al_2O_3).

El hijo, $^{99\text{m}}\text{Tc}$ ($^{99\text{m}}\text{TcO}_4$) no queda fuertemente ligado a la columna y se puede hacer la elución con 5-25 mL de solución salina.

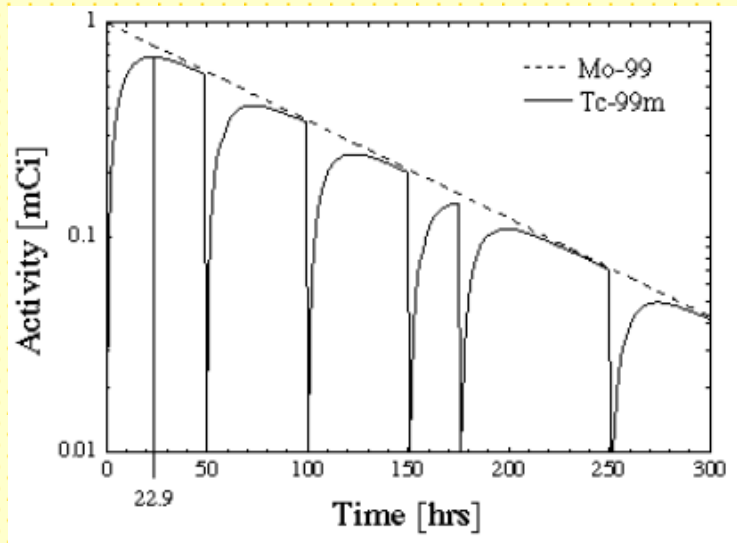
Los generadores comerciales son esterilizados, blindados y automatizados.

Se los usa por aproximadamente una semana y luego se descartan debido al decaimiento del ^{99}Mo .

Ejemplo de aplicación del equilibrio: generadores.

En la práctica, la eficiencia de elución no es 100%, si no del orden del 80-90%.

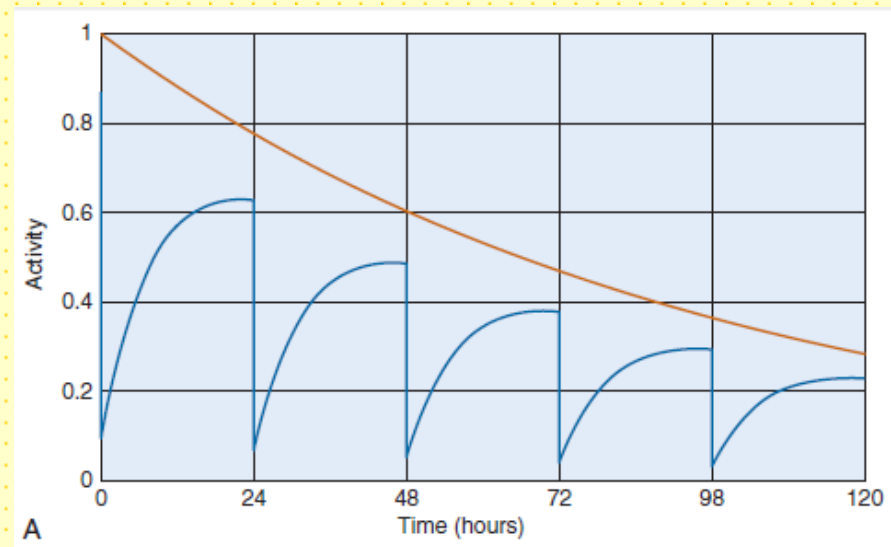
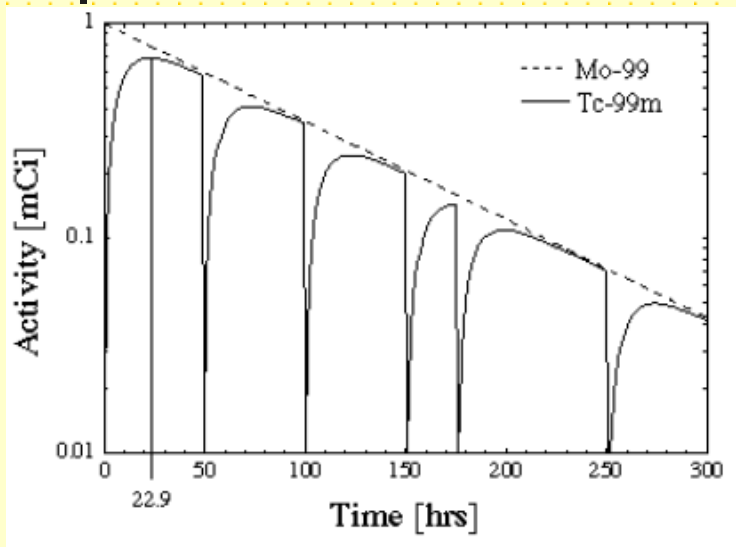
La eficiencia de elución puede variar de un proceso de elución a otro debido a cambios químicos en la columna (que pueden ser generados por el daño por radiación).



Si el 90% de la actividad de ^{99m}Tc es removida en la elución, la actividad obtenida va a ser 10% menor a la predicha.

El 10% de ^{99m}Tc residual se convierte en " $A(0)$ " para la próxima elución, reduciendo el tiempo necesario para alcanzar la máxima actividad

Ejemplo de aplicación del equilibrio: generadores.



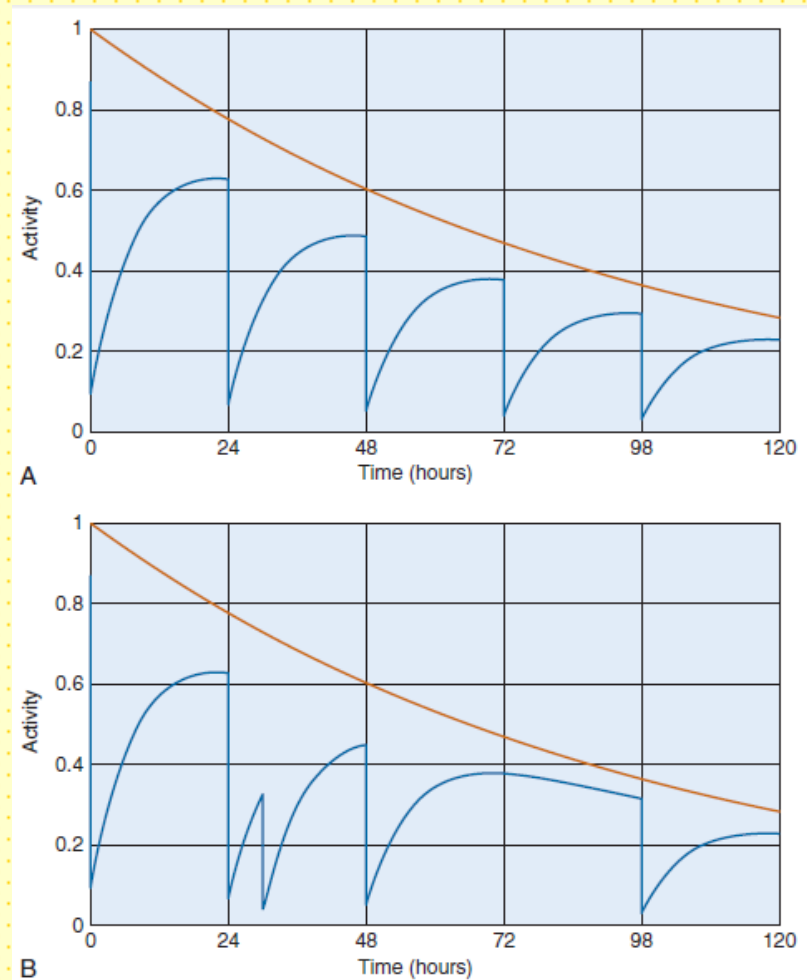
En la práctica, se mantiene registros del rendimiento de elución de los generadores a fin de identificar problemas o generadores de bajo rendimiento.

Una ecuación simplificada para predecir rendimientos (Y_2) para eluciones realizadas en intervalos regulares y largos (24 hs o más). Y_1 es el rendimiento de la elución inmediatamente anterior.

$$Y_2 = \frac{Y_1 \times (e^{-\lambda_p \Delta t_2} - e^{-\lambda_d \Delta t_2})}{[1 - e^{-(\lambda_d - \lambda_p) \Delta t_1}]}$$

Ejemplo de aplicación del equilibrio: generadores.

Eluciones a intervalos irregulares.





Ejemplo de aplicación del equilibrio: generadores.

Últimos comentarios:

¿Cómo se obtiene el ^{99}Mo ?

Dos procesos: fragmentos de fisión del ^{235}U ("fission Moly").

Irradiación de Mo con neutrones.

(ya discutiremos ambos procesos)

Problemas con los generadores

Contaminación de la elución con ^{99}Mo .

Por norma de protección al paciente, 0.15 Bq de ^{99}Mo por cada kBq de $^{99\text{m}}\text{Tc}$.

Se puede detectar mediante espectroscopía gamma (ya lo veremos!).

Contaminación de la elución con Al. Afecta el estudio y puede afectar al paciente (coágulos de sangre y microembolia). 10 μg de Al por ml de $^{99\text{m}}\text{Tc}$.

Tests químicos para detectar la presencia de Al en la elución.