Práctica Grupos de Lie

1. Pffafiano: Sea $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$ antisimétrica, i.e. $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$. El Pffafiano de $\boldsymbol{\omega}$ se define como

$$\text{Pffafiano :} \qquad \mathrm{Pf}(\boldsymbol{\omega}) \equiv \frac{1}{2^n n!} \sum \epsilon_{i_1 i_2 \ldots i_{2n}} \omega_{i_1 i_2} \omega_{i_3 i_4} \ldots \omega_{i_{2n-1} i_{2n}}$$

i. Mostrar que

$$\mathrm{Pf}(\boldsymbol{M}^t \boldsymbol{\omega} \boldsymbol{M}) = \det(\boldsymbol{M}) \mathrm{Pf}(\boldsymbol{\omega})$$

ii. Reduciendo $\boldsymbol{\omega}$ a una forma canónica apropiada mostrar que

$$(\mathrm{Pf}(\boldsymbol{\omega}))^2 = \det(\boldsymbol{\omega})$$

iii. Usando estas propiedades mostrar que las matrices $\boldsymbol{S}$ del grupo simpléctico

$$Sp(2n, \mathbb{F}) = \{\boldsymbol{S} \in GL(2n, \mathbb{F}) : \boldsymbol{S}^T \boldsymbol{\omega} \boldsymbol{S} = \boldsymbol{\omega}\}, \quad \boldsymbol{\omega}^T = -\boldsymbol{\omega} \text{ no degenerada, } \mathbb{F} = \mathbb{R} \text{ o } \mathbb{C}$$

satisfacen $\det \boldsymbol{S} = +1$

2. Operaciones con matrices

i. Mostrar que si $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ conmutan

$$\exp(\boldsymbol{A}) \exp(\boldsymbol{B}) = \exp(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = \exp(\boldsymbol{B}) \exp(\boldsymbol{A})$$

ii. Campbell+Haussdorf: mostrar que si $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son matrices con componentes pequeñas

$$\exp(\boldsymbol{A}) \exp(\boldsymbol{B}) = \exp(\boldsymbol{C})$$

donde

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} + \frac{1}{2}[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}] + \frac{1}{12}\left([\boldsymbol{A}, [\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}]] + [\boldsymbol{B}, [\boldsymbol{B}, \boldsymbol{A}]]\right) + \ldots$$

donde los términos subsiguientes son conmutadores de orden mayor.

3. Algebras de Lie

(a) Mostrar que el espacio de matrices $N \times N$ dotado de un corchete de Lie dado por el conmutador $[A, B] \equiv AB - BA$ es un álgebra de Lie. En particular la identidad de Jacobi resulta de la asociatividad del producto de matrices.

(b) Mostrar que $V = \mathbb{R}^3$ dotado con el producto vectorial usual $\times : V \times V \to V$ es un álgebra de Lie.

(c) Mostrar que el corchete de Lie para campos vectoriales $\boldsymbol{V} = V^\mu(x)\boldsymbol{\partial}_\mu$ y $\boldsymbol{W} = W^\mu(x)\boldsymbol{\partial}_\mu$ definido como $[\boldsymbol{V}, \boldsymbol{W}]f = \boldsymbol{V}(\boldsymbol{W}(f)) - \boldsymbol{W}(\boldsymbol{V}(f))$ satisface la identidad de Jacobi.

(d) Mostrar que la identidad de Jacobi para elementos $\boldsymbol{D}, \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$ puede ser escrita como

$$[\boldsymbol{D}, [\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}]] = [[\boldsymbol{D}, \boldsymbol{X}], \boldsymbol{Y}] + [\boldsymbol{X}, [\boldsymbol{D}, \boldsymbol{Y}]]$$

Comparar esta expresión con $d(f \cdot g) = df \cdot g + f \cdot dg$ y justificar por qué a la identidad de Jacobi se la suele llamar 'identidad diferencial'.

4. Algebra de Heisenberg: mostrar que el álgebra de Heisenberg $[q, p] = i\hbar$ definida como $V = span_{\mathbb{C}}(q, p, i\hbar)$ usualmente definida sobre el espacio de funciones $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ de cuadrado integrable en $\mathbb{R}$ como $q : f(q) \mapsto qf(q)$ y $p : f(q) \mapsto -i\hbar\frac{\partial f}{\partial q}$ es isomorfo a

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donde $V = span_{\mathbb{C}}(X, Y, Z)$ y el corchete de Lie es el comutador usual.

5. Representacion adjunta $\mathrm{ad}_{\boldsymbol{V}} : V \to V$: sea V un espacio vectorial. Se define como

$$\mathrm{ad}_{\boldsymbol{V}} \boldsymbol{X} \equiv [\boldsymbol{V}, \boldsymbol{X}]$$

   i. Mostrar que

$$\mathrm{ad}_{[\boldsymbol{V},\boldsymbol{W}]} = [\mathrm{ad}_{\boldsymbol{V}}, \mathrm{ad}_{\boldsymbol{W}}]$$

   ii. dada un algebra de Lie $\mathfrak{g}$

$$[\boldsymbol{T}_a, \boldsymbol{T}_b] = f_a{}^c{}_b \, \boldsymbol{T}_c \tag{1}$$

   Mostrar que $(\boldsymbol{T}_a)^c{}_b = f_a{}^c{}_b$ es una representación del álgebra (1) de dimensión $d = |\mathfrak{g}|$.

6. Killing+Cartan y constantes de estructura antisimétricas: considerando la métrica de Killing+Cartan

$$g_{ab} \equiv \mathsf{Tr}\,(\boldsymbol{T}_a \boldsymbol{T}_b) = f_a{}^m{}_n \, f_b{}^n{}_m$$

   construida a partir de las constantes de estructura, mostrar que las constantes $f_{acb} \equiv g_{cd} f_a{}^d{}_b$ son completamente antisimétricas.

7. Clausura del álgebra de Lie

   i. Mostrar que el conmutador de matrices antihermíticas da una matriz antihermítica. Hallar la relación con $U(N)$.

   ii. Mostrar que si λ_1 y λ_2 son matrices hermíticas, la matriz λ_3 definida a partir de $[\lambda_1, \lambda_2] = i\lambda_3$ es también hermítica.

   ii. El producto de matrices antisimétricas puede no ser ni simétrico ni antisimétrico. Mostrar que los generadores de $O(N)$ son matrices antisimétricas $N \times N$, y que si A_1 y A_2 son matrices antisimétricas entonces $[A_1, A_2]$ también lo es.

   iii. Obtener los generadores de $Sp(2n, \mathbb{R})$, observando que tienen la forma

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a^T \end{pmatrix} ,$$

   donde a es una matriz $n \times n$ real arbitraria y b, c matrices $n \times n$ reales simétricas. Mostrar que el conmutador de cualesquiera dos matrices de esta forma indicada arriba toma también esta forma.

8. $\boldsymbol{SU(2)}$ I. Killing+Cartan: parametrizar $SU(2)$ y encontrar explícitamente la ley de composición $x'' = x''(x, x')$ evaluando $g(x)g(x') = g(x'')$. Construir la métrica de Killing+Cartan $\boldsymbol{g}$ en T_eG y transportarla via left/right action a todo el grupo usando la ley de composición. Mostrar que la métrica obtenida de esta forma coincide con la métrica natural de S^3.

9. $\boldsymbol{SU(2)}$ II. Métrica bi-invariante: sea $U = \exp(\frac{i}{2}\psi\, \check{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \in SU(2)$
   i. Mostrar que

$$ds^2 = \mathsf{Tr}\left(dU^\dagger dU\right) = 2\left((d\tfrac{\psi}{2})^2 + \sin^2\tfrac{\psi}{2}\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)\right)$$

   ii. Mostrar que la métrica es bi-invariante, esto es, invariante frente a $U \mapsto U' = L \cdot U \cdot R$ con $L, R \in SU(2)$ independientes.

10. $\boldsymbol{SL(2,}\mathbb{R}\boldsymbol{)}$ I: Mostrar que toda matriz real $\boldsymbol{M}$ de determinante 1 (unimodular) puede ser escrita como $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{O}$ con $\boldsymbol{S}$ real, simétrica y unimodular y $\boldsymbol{O}$ ortogonal.

11. $\boldsymbol{SL(2,}\mathbb{R}\boldsymbol{)}$ II: obtener el transporte de una métrica arbitraria g_{ij} en la identidad a todo el grupo via right action. Mostrar que sólo si se elige g_{ij} = Killing+Cartan, la métrica hallada via right action coincide con la métrica obtenida por left action.

12. $\boldsymbol{SO(3)}$, $\boldsymbol{SU(2)}$ y su homomorfismo

   i. Considerar los generadores $\boldsymbol{L}_i$ de $SO(3)$ y hallar su álgebra de Lie. Evaluar

$$R_{\theta,\check{\boldsymbol{n}}} = e^{\theta\, \check{\boldsymbol{n}} \cdot \mathbf{L}}$$

   a fuerza bruta o mediante el teorema de Cayley-Hamilton, concluyendo que

$$R_{\theta,\check{\boldsymbol{n}}} = \mathbb{I}_3\, f_0(\theta) + \mathbf{X} f_1(\theta) + \mathbf{X}^2 f_2(\theta)\,,$$

donde $\mathbf{X} = \theta\, \check{\boldsymbol{n}} \cdot \mathbf{L}$ y θ es el único invariante de conjugación que puede ser construido a partir de $\mathbf{X}$, donde

$$f_0(\theta) = \cos\theta, \qquad f_1(\theta) \ = \frac{\sin\theta}{\theta}, \qquad f_2(\theta) = \frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\,.$$

ii. Justificar que $\check{\boldsymbol{n}}$ es el eje de rotación, hallando los autovectores de $\check{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{L}$.

iii. Considerar $\boldsymbol{J}_i = \frac{i}{2}\sigma_i$, hallar su álgebra de Lie.

iv. Mostrar que si a la matriz $R_{\theta,\check{\boldsymbol{n}}}$ de $SO(3)$ le asociamos la matriz $U(R)$ de $SU(2)$ dada por

$$U(R) = e^{\frac{i}{2}\theta\, \check{\boldsymbol{n}}\cdot\sigma}\,,$$

con $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, entonces la matriz $U(R)$ satisface

$$U(R)\sigma_i U(R)^{-1} = \sigma_j R^j{}_i\,,$$

completando la prueba de que el homomorfismo $\phi : SU(2) \to SO(3)$ es sobreyectivo.

v. Producto vectorial en $\mathbb{R}^3$ y generadores de $SO(3)$: sea $\boldsymbol{n}$ es un vector unitario en $\mathbb{R}^3$ y $R_{\theta,\check{\boldsymbol{n}}}$ la rotación alrededor del eje $\boldsymbol{n}$ de ángulo θ (medido en radianes, en sentido antihorario visto desde la punta de $\boldsymbol{n}$). Mostrar que

$$\left.\frac{d}{d\theta}\right|_{\theta=0} R_{\theta,\check{\boldsymbol{n}}}\, \boldsymbol{x} = \check{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{x}, \quad \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$$

Por lo tanto, el producto vectorial con $\check{\boldsymbol{n}} \times \cdot$ describe la acción del generador de rotaciones alrededor del eje dado por $\check{\boldsymbol{n}}$ sobre $\boldsymbol{x}$. Concluir que el álgebra de Lie discutida en 2.b es isomorfa a $so(3)$.

13. $\boldsymbol{SO(1,1)}$

Construir el grupo de transformaciones que dejan invariante el intervalo en 1+1-dimensiones: $s^2 = ct^2 - x^2$. Comparar este resultado con el grupo de transformaciones $SO(2)$ que dejan invariante la cantidad $r^2 = x^2 + y^2$.

14. $\boldsymbol{SU(1,1)}$

i. Mostrar que los elementos $g \in SU(1,1)$ se parametrizan por dos complejos $c_1 = a_1 + ib_1$ y $c_2 = a_2 + ib_2$ como

$$g = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ \bar{c}_2 & \bar{c}_1 \end{pmatrix},$$

con la condición $a_1^2 + b_1^2 - a_2^2 - b_2^2 = 1$.

ii. Mostrar que la variedad que parametriza el grupo es $\mathbb{R}^2 \times S^1$ (no simplemente conexa).

iii. Construir el isomorfismo $SU(1,1) \approx SL(2,\mathbb{R})$.

15. Corchete de Lie y curvas sobre la variedad $\mathcal{M}$

Un grupo de Lie es una variedad diferenciable $\mathcal{M}_G$ dotada de una estructura de grupo para las operaciones de multiplicación e inversión que es diferenciable. Todo grupo de Lie tiene un álgebra de Lie asociada $\mathfrak{g}$, dada por derivaciones en la identidad e. Específicamente, todo elemento $\boldsymbol{a}$ del espacio tangente en la identidad T_eG puede representarse por una curva $A : (-\epsilon, \epsilon) \to G$ con $A(0) = e$. Dados dos vectores $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in T_eG$, definimos su corchete $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ como el vector dado por la mitad de la derivada segunda de la curva C obtenida como

$$C(t) = A(t)B(t)A(t)^{-1}B(t)^{-1} \tag{2}$$

(a) Verificar que si G es un grupo de Lie lineal, es decir, un subgrupo del conjunto de transformaciones lineales $GL(n,\mathbb{R})$, entonces su álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, definida como derivaciones en la identidad, tendrá su corchete dado precisamente por la operación habitual del conmutador de matrices. Mas precisamente, siendo las curvas $A(t), B(t)$ las representantes de los vectores $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$, de la definición (2) mostrar que

$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = \left.\frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}\right|_{t=0} A(t)B(t)A(t)^{-1}B(t)^{-1}$$