D D'Ascanio+GA Silva
dascanio,silva@fisica.unlp.edu.ar
v2 2022/09/01

Práctica II: Caracteres, Representaciones irreducibles y Coeficientes de Clebsch-Gordan

1. i. Muestre que las representaciones irreducibles de un grupo abeliano son unidimensionales.

   ii. Muestre que si el grupo abeliano es cíclico cada una de estas representaciones es un conjunto de raíces de la unidad. Construya las representaciones irreducibles y las tablas de caracteres de $\mathbb{Z}_n$ y de D_2.

2. Calcule las tablas de caracteres de los grupos S_3 y D_4. Escriba las matrices correspondientes a las irreps de estos grupos.

3. i. Muestre que el producto directo de dos representaciones unitarias es también una representación unitaria.

   ii. Muestre que los caracteres de la representación producto directo $D^{J\otimes K}(G) := (D^J \otimes D^K)(G)$ satisfacen

$$\chi^{J\otimes K}(g) = \chi^J(g)\,\chi^K(g).$$

4. Teoremas de ortogonalidad de caracteres

   i. Demuestre los lemas de Schur y, a partir de ellos, la relación de ortogonalidad

$$\sum_{g\in G} D^J_{ij}(g) D^K_{kl}(g^{-1}) = \frac{|G|}{\dim J}\,\delta_{JK}\delta_{il}\delta_{jk} \tag{1}$$

   válida para los elementos de matriz de dos representaciones irreducibles D^J, D^K de un grupo finito G.

   ii. A partir de la expresión (1) derive el primer teorema de ortogonalidad de caracteres:

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} (\chi^J(g))^* \chi^K(g) = \delta^{JK}\,,$$

   donde $\chi^J(g) = \mathrm{Tr}\,D^J(g)$ es el caracter correspondiente a la representación irreducible J. La suma sobre G puede ser reescrita en términos de una suma sobre las clases de conjugación $\mathcal{C}_i$ $(i = 1, \ldots, \mathcal{N}_\mathcal{C})$

$$\frac{1}{|G|}\sum_i d_i\,(\chi^J_i)^* \chi^K_i = \delta^{JK} \tag{2}$$

   donde d_i es el número de elementos de la clase $\mathcal{C}_i$ y $\chi^J_{\mathcal{C}_i}$ es el caracter representativo de la clase i-ésima correspondiente a la irrep J. Puesto que el número de clases de equivalencia $\mathcal{C}_i$ coincide con el número de irreps J la tabla de caracteres resulta una matriz cuadrada

G	$d_1, \mathcal{C}_1$	$d_2, \mathcal{C}_2$	$\ldots$	$d_s, \mathcal{C}_s$
D^1	$\chi^1_{\mathcal{C}_1}$	$\chi^1_{\mathcal{C}_2}$	$\cdots$	$\chi^1_{\mathcal{C}_s}$
D^2	$\chi^2_{\mathcal{C}_1}$	$\chi^2_{\mathcal{C}_2}$	$\cdots$	$\chi^2_{\mathcal{C}_s}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
D^s	$\chi^s_{\mathcal{C}_1}$	$\chi^s_{\mathcal{C}_2}$	$\cdots$	$\chi^s_{\mathcal{C}_s}$

   La expresión (2) implica que las filas de la tabla de caracteres son ortogonales -si pesamos cada término del producto escalar con el número de elementos de la clase correspondiente.-

   iii. Mostrar que las columnas también resultan ortogonales de acuerdo con

$$\frac{1}{|G|}\sum_J (\chi^J_i)^* \chi^J_j = \frac{1}{d_i}\,\delta_{ij}\,. \tag{3}$$

iv. Utilice las relaciones de ortogonalidad para construir la tabla de caracteres del grupo $D_3 \approx S_3$. Halle los coeficientes a_L en la descomposición

$$D^{J\otimes K}(G) = \bigoplus_{L=1}^{s} a_L D^L(G)\,,$$

para todos los pares J, K de irreps del grupo S_3. Halle el vector invariante de la representación $D^{3\otimes 3}$.

v. Construya la tabla de caracteres de D_4. Escriba funciones de onda que transformen de acuerdo con cada una de sus representaciones irreducibles. Describa las posibles propiedades de transformación de los estados estacionarios de dos electrones ligados a una molécula con simetría D_4.

5. Operadores de proyección

Considere una representación D del grupo finito G que se descompone en representaciones irreducibles D^J definidas sobre espacios de representación E^J. Sea $\{e^J_j\}_{j=1,\dots,\dim J}$ una base de E^J.

i. Utilizando la expresión (1) del ejercicio anterior calcule la acción de los operadores proyección

$$P^J_{ij} := \frac{\dim J}{|G|} \sum_{g\in G} D^J_{ij}(g^{-1})\; D(g)\,\cdot$$

sobre los elementos de las bases e^J_j y muestre que a partir de un elemento de la base de un espacio E^J pueden obtenerse los restantes elementos de esa base.

ii. Estudie la acción del operador proyección

$$P^J := \sum_i P^J_{ii}$$

sobre un vector cualquiera del espacio de la representación D y muestre que estos operadores permiten identificar los subespacios invariantes E^J. ¿Cuál es la ventaja de los operadores P^J sobre los operadores P^J_{ij}?

iii. Descomponga la representación regular (tridimensional) de S_3 en representaciones irreducibles. Construya los operadores proyección y encuentre, a partir de ellos, los subespacios invariantes y las matrices de las correspondientes representaciones irreducibles de S_3.

6. Coeficientes de Clebsch-Gordan

i. Considere la representación producto $D^{3\otimes 3}$ del grupo S_3 y utilice los operadores proyección para determinar los subespacios invariantes. Determine la matriz de coeficientes de Clebsch-Gordan.

ii. Considere dos representaciones irreducibles D^I, D^J de un grupo finito G. Sean E^I, E^J sus espacios de representación y $\{e^I_i\}_{i=1,\dots,\dim I}$, $\{e^J_j\}_{j=1,\dots,\dim J}$ bases de estos espacios. La representación $D^{I\otimes J}$ está definida sobre el espacio $E^I \otimes E^J$ -de base $\{|e^I_i, e^J_j\rangle\}$- y se descompone en representaciones irreducibles D^K de la siguiente manera:

$$D^{I\otimes J} = \bigoplus_K \, n^K_{IJ}\, D^K$$

Sean $\{e^K_k\}_{k=1,\dots,\dim K}$ las bases de los espacios donde actúan las representaciones irreducibles D^K del miembro derecho de la expresión anterior. Los coeficientes de Clebsch-Gordan $(K,k|I,i;J,j)$ se definen a partir del cambio de base[1]

$$|e^I_i, e^J_j\rangle = \sum_{K,k} (K,k|I,i;J,j)\; |e^K_k\rangle$$

Aplique los operadores proyección P^I_{ij} a ambos miembros de esta expresión y obtenga la relación

$$(K,k|I,i;J,j)(I,m;J,n|K,l) = \frac{\dim K}{|G|} \sum_{g\in G} D^K_{kl}(g^{-1}) D^I_{mi}(g) D^J_{nj}(g) \tag{4}$$

[1] Por simplicidad supondremos en este ejercicio que los coeficientes $n^K_{IJ} \le 1$.

iii. Utilice la expresión (4) para reobtener los coeficientes de Clebsch-Gordan calculados en el ejercicio (i).

iv. Calcule los coeficientes de Clebsch-Gordan en la descomposición de $D^{5\otimes 5}$, siendo D^5 la representación irreducible bidimensional del grupo D^4.

7. Álgebra de un grupo finito

El álgebra $\mathbb{C}(G)$ de un grupo finito G es el espacio de combinaciones lineales de elementos del grupo con coeficientes complejos. Este espacio vectorial admite un producto lineal definido a partir de la composición de elementos del grupo. Para cada clase de conjugación $\mathcal{C}_i$ -constituida por los d_i elementos $\{g_1^{(i)}, g_2^{(i)}, \ldots, g_{d_i}^{(i)}\}$- definimos el elemento c_i en el álgebra $\mathbb{C}(G)$ como

$$c_i := g_1^{(i)} + g_2^{(i)} + \ldots + g_{d_i}^{(i)} .$$

i. Muestre que un elemento de $\mathbb{C}(G)$ conmuta con todos los elementos de $\mathbb{C}(G)$ sii es una combinación lineal de los elementos c_i, i.e., el subespacio de $\mathbb{C}(G)$ generado por los vectores c_i es el centro $Z[\mathbb{C}(G)]$ del álgebra del grupo.

ii. Muestre que existen constantes c_{ij}^k tales que

$$c_i \cdot c_j = \sum_k c_{ij}^k \, c_k$$

Por consiguiente, el centro del álgebra es invariante ante la multiplicación por elementos c_i. Además, la acción de dos elementos c_i, c_j conmuta; de modo que es posible diagonalizarlos simultáneamente.

iii. Muestre que los autovectores simultáneos de estas aplicaciones están dados por los vectores de proyección, definidos para cada representación irreducible J de la siguiente manera:

$$P^J := \frac{\dim J}{|G|} \sum_{g \in G} \chi^J(g^{-1}) \; g \cdot$$

iv. Construya estos vectores para el grupo S_3 y utilícelos para determinar nuevamente su tabla de caracteres.