D D'Ascanio+GA Silva
dascanio,silva@fisica.unlp.edu.ar

v2 2022/08/18

Práctica I: Subgrupos invariantes, Grupo cociente y Clases de Conjugación

Discrete

1. Muestre la unicidad del elemento neutro y del elemento inverso de un grupo.

2. Calcule las tablas de composición de los grupos abstractos de dos, tres y cuatro elementos. ¿Son abelianos? ¿Son cíclicos? Muestre realizaciones de estos grupos en términos de grupos cíclicos. ¿Cuál es el grupo no abeliano de menor orden?

3. Indique en qué sentido $\mathbb{Z}_m$ es un subgrupo de $U(1)$. ¿Es invariante?

4. Muestre que el conjunto de los enteros múltiplos de n es un subgrupo invariante de $\mathbb{Z}$. Construya los cosets y encuentre el grupo cociente.

5. Sean $\sigma = (132)(45)$ y $\tau = (15423)$ elementos de S_5. Calcule las permutaciones: $\sigma\tau, \sigma^{-1}, \tau^{-1}, (\sigma\tau)^{-1}$ y $\tau^{-1}\sigma^{-1}$, indique su paridad. Determine las matrices correspondientes a estos elementos en la representación regular de S_5.

6. Describa las clases de conjugación de S_2, S_3 y S_4 utilizando diagramas de Young y calcule el número de elementos en cada una de ellas.

7. Construya la tabla de composición de S_3. Calcule sus subgrupos e identifique aquellos que son invariantes. Muestre que $S_3/\mathbb{Z}_3 \approx \mathbb{Z}_2$.

8. Calcule el número de elementos del grupo D_n (simetrías del polígono de n lados). Considere los grupos D_2, D_3 y D_4, descompóngalos en sus clases de conjugación y determine los subgrupos invariantes. ¿A qué grupo corresponde el cociente $D_4/\mathbb{Z}_2$?

9. Sea D una representación matricial de un grupo. Muestre que D^*, $(D^t)^{-1}$ y $(D^\dagger)^{-1}$ también lo son. Muestre además que son representaciones unitarias si D lo es.

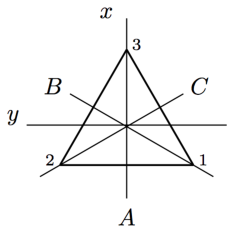
10. Sea $f : G \to G'$ un homomorfismo de grupos. Muestre que
    i. $f(e) = e'$ donde e, e' son los neutros de G, G' respectivamente.
    ii. $f(g^{-1}) = (f(g))^{-1}$

11. D_3 es el grupo de simetrías de un triángulo equilátero. Podemos representar sus elementos por las matrices

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi}{3} & \sin\frac{2\pi}{3} \\ \sin\frac{2\pi}{3} & -\cos\frac{2\pi}{3} \end{pmatrix}, \tag{1}$$

$$C = \begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi}{3} & -\sin\frac{2\pi}{3} \\ -\sin\frac{2\pi}{3} & -\cos\frac{2\pi}{3} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi}{3} & \sin\frac{2\pi}{3} \\ -\sin\frac{2\pi}{3} & \cos\frac{2\pi}{3} \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi}{3} & -\sin\frac{2\pi}{3} \\ \sin\frac{2\pi}{3} & \cos\frac{2\pi}{3} \end{pmatrix}.$$

Los elementos A, B, C son reflexiones con respecto a los ejes principales del triángulo (ver Fig.1). Los elementos D y F corresponden a rotaciones horaria y antihoraria de 120^o alrededor de un eje normal al plano del triángulo.



A, B, C: Ejes de reflexión del triángulo equilátero

La tabla de composición del grupo es:

$$
\begin{array}{c|cccccc}
 & E & A & B & C & D & F \\
\hline
E & E & A & B & C & D & F \\
A & A & E & D & F & B & C \\
B & B & F & E & D & C & A \\
C & C & D & F & E & A & B \\
D & D & C & A & B & F & E \\
F & F & B & C & A & E & D
\end{array}
\tag{2}
$$

i. Muestre que D_3 es isomorfo al grupo de permutaciones S_3. ¿Es válido en general que $D_n \approx S_n$?

ii. Muestre que únicamente A_3 –el subgrupo de las permutaciones pares– es un subgrupo invariante.

iii. Considere los subgrupos isomorfos a $H = \mathbb{Z}_2$ y estudie la construcción de los cosets a izquierda y derecha y la posibilidad de definir el grupo cociente G/H. Repita el análisis para el subgrupo A_3.

iv. Escriba la representación tridimensional de D_3 en la que el triángulo pertenece al plano $z = 0$ del espacio $\mathbb{R}^3$ y las matrices correspondientes a los elementos A, B, C son las rotaciones de 180^o alrededor de los ejes A, B, C [1]. ¿Existen subespacios de $\mathbb{R}^3$ invariantes en esta representación?

v. Considere la representación bidimensional (1) sobre el espacio complejo $\mathbb{C}^2$ e indique si existen subespacios invariantes.

Continuum

1. i. Muestre que la representación del grupo de rotaciones de vectores del plano dada por

$$
R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos m\theta & -\sin m\theta \\ \sin m\theta & \cos m\theta \end{pmatrix}, \tag{3}
$$

que define el grupo de matrices $SO(2)$, es abeliana.

ii. Muestre que no existen subespacios del plano $\mathbb{R}^2$ invariantes bajo la acción del grupo.

iii. Muestre que el conjunto $\{R(\theta),\ \forall\theta\}$ puede ser simultáneamente diagonalizado con una misma matriz U si se consideran vectores con componentes complejas $\mathbb{C}^2$

$$
R(\theta) = U\, D(\theta)\, U^{-1}, \qquad D(\theta) = \mathrm{diag}(e^{im\theta}, e^{-im\theta})\,. \tag{4}
$$

Encuentre U y determine los subespacios invariantes de $\mathbb{C}^2$. A partir de este resultado, obtenga una representación del grupo de rotaciones sobre el plano complejo $\mathbb{C}$. Establezca un isomorfismo entre $SO(2)$ y $U(1)$.

iii. Considere la representación del grupo sobre el plano complejo $\mathbb{C}$ en la que la acción de una rotación $R(\theta)$ es representada por la multiplicación por el complejo $e^{im\theta}$ (siendo m un número real fijo.) ¿Para qué valores de m está bien definida esta representación? ¿Para cuáles es fiel?

2. Muestre que el grupo lineal $GL(n, \mathbb{C})$ contiene a $SL(n, \mathbb{C}) \subset GL(n, \mathbb{C})$ como un subgrupo invariante. Calcule el centro de ambos grupos.

3. i. Muestre que $SL(2, \mathbb{Z})$ y $U(1)$ son subgrupos de $GL(2, \mathbb{C})$. ¿Son subgrupos invariantes?

ii. Repita este análisis para el grupo $SL(2, \mathbb{R})$.

iii. Calcule el centro de $SU(N)$.

4. i. Sean F y G dos grupos y $\phi : F \to G$ un homomorfismo. Muestre que $\phi(e_F) = e_G$ donde e_F y e_G son los elementos identidad en F y G respectivamente. Muestre que el núcleo $\phi^{-1}(e_G)$ del homomorfismo es un subgrupo invariante y que el grupo cociente $F/\phi^{-1}(e_G)$ es isomorfo a G.

ii. Aplique estos resultados a los grupos $O(2)$ y $SO(2)$.

ii. Verifique estos resultados en el caso en que $F = GL(n, \mathbb{R})$, $G = \mathbb{R}^\times$ y $\phi :\ F \to G$ es el homomorfismo que asocia a cada matriz su determinante.

[1] En este caso D_3 se entiende como un subgrupo discreto de $SO(3)$.