1. Simetrías del potencial coulombiano en tres dimensiones.

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{k}{r}$$

Sistema clásico

i. Mostrar que el momento angular $\mathbf{L}$ y el vector de Runge-Lenz $\mathbf{M} = \frac{1}{m}\,\mathbf{p} \wedge \mathbf{L} - k\,\check{\mathbf{r}}$ son cantidades conservadas.

iii. Calcular $\mathbf{L} \cdot \mathbf{M}$ y $\mathbf{M}^2$. ¿Cuántas cantidades conservadas independientes posee el sistema?

Sistema cuántico

i. Mostrar que $\mathbf{L}$ y la parte hermítica $\mathbf{M}$ del vector de Runge-Lenz conmutan con el Hamiltoniano.

ii. Calcular el álgebra de estos operadores y comparar los valores $\mathbf{L} \cdot \mathbf{M}$ y $\mathbf{M}^2$ con sus valores clásicos.

iii. Estudiar las representaciones del álgebra para determinar las energías de los estados ligados y su degeneración. ¿Cuál es el momento angular orbital de estos estados?

iv. Considerar el grupo $SO(d)$ y mostrar que una rotación infinitesimal de ángulo $\delta\theta$ en el plano generado por $\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j$, $1 \leq i < j \leq d$ se puede escribir como

$$\delta^{(ij)} x^k = \delta\theta\, \omega^{(ij)}_{kl}\, x^l$$

donde $\omega^{(ij)}_{kl} = -(\delta_{ki}\delta_{lj} - \delta_{kj}\delta_{li})$.

a. Determinar los operadores diferenciales J^{ij}, $i < j$, que generan las transformaciones correspondientes sobre funciones escalares de las coordenadas x^k. Mostrar que las relaciones de conmutación de los J pueden ser escritas como

$$[J^{kl}, J^{mn}] = i(\delta_{km}J^{ln} - \delta_{kn}J^{lm} - \delta_{lm}J^{kn} + \delta_{ln}J^{km})\,. \tag{1}$$

Para el caso $d = 3$ recuperar las relaciones de conmutación usuales. Para el caso $d = 4$ introducir las combinaciones

$$\begin{aligned} A^\alpha &= \frac{1}{2}\,\epsilon_{\alpha\beta\gamma} J^{\beta\gamma} \\ B^\alpha &= J^{\alpha 4} \end{aligned}$$

donde los índices α, β, γ toman valores de 1 a 3 y verificar que el grupo de simetría de los estados ligados del problema de Coulomb en tres dimensiones es $SO(4)$.

2. Simetrías del oscilador armónico en dos dimensiones.

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2} + \frac{\mathbf{x}^2}{2}$$

i. Mostrar que el momento angular L conmuta con el Hamiltoniano H.

ii. A partir de operadores de creación y destrucción de estados con polarización circular, construir un espacio de Fock cuya base sean autoestados de H y de L.

iii. En cada subespacio de energía definida, encontrar operadores de creación y destrucción de momento angular y mostrar que junto con el momento angular L generan el álgebra de simetría $SU(2)$. Escribir el Hamiltoniano en términos del operador de Casimir para determinar las energías del oscilador y calcular la degeneración a partir de la dimensión de las representaciones irreducibles.

iv. Mostrar que el oscilador en d dimensiones tiene un grupo de simetría $SU(d)$.

3. i. Considerar un sistema de tres partículas idénticas de spin 1/2 y estudiar las irreps. unidimensionales de S_3 para describir los estados simétricos y antisimétricos.

   ii. Utilizando los operadores escalera calcular los posibles valores de spin del sistema y obtener los coeficientes de Clebsch-Gordan.

   iii. Calcular la medida invariante de $SU(2)$ y utilizar las relaciones de ortogonalidad entre caracteres —para grupos compactos— para verificar los resultados del ejercicio anterior.

4. Grupo de Lorentz ortócrono $SO(3,1)^{\uparrow}$ y su relación con $SL(2,\mathbb{C})$:

   i. Mostrar que toda matriz hermítica X de 2×2 puede expresarse como

$$A = \begin{pmatrix} ct+z & x-iy \\ x+iy & ct-z \end{pmatrix} = ct\mathbb{I}_2 + \mathbf{x}\cdot\sigma\,,$$

   donde σ_i son las matrices de Pauli.

   ii. Mostrar que para toda $g \in SL(2,\mathbb{C})$ se tiene que $g^\dagger X g = X'$ es hermítica. Expresando X' como en el inciso anterior, hallar la relación (lineal) entre los coeficientes ct', x', y', z' y ct, x, y, z en términos de los coeficientes de g.

   iii. Hallar el subgrupo de $SL(2,\mathbb{C})$ que deja invariante $t' = t$.

   iv. Mostrar que todo $g \in SL(2,\mathbb{C})$ se puede escribir como $g = kh$ con $h \in SU(2)$ ($h^{-1} = h^\dagger$, $h = e^{\frac{i}{2}\theta\cdot\sigma}$) y k de la forma $k = e^{\frac{1}{2}\mathbf{b}\cdot\sigma}$ ($k \in SL(2,\mathbb{C})/SU(2)$, $k^\dagger = k^{+1}$). Los vectores θ y $\mathbf{b}$ son reales y el vector $\mathbf{b}$ se denomina vector de boost. Calcular $X' = k^\dagger X k$ y mostrar que de la relación entre ct', x', y', z' y ct, x, y, z resulta una transformación de Lorentz correspondiente a un boost en la dirección b (si se complica considerar $b = (b, 0, 0)$).

   v. Aplicar dos transformaciones k colineales consecutivas ($k(\mathbf{b}')$ luego de $k(\mathbf{b})$) y mostrar que resulta $k(\mathbf{b}' + \mathbf{b})$, esto es, que no aparece componente en $SU(2)$. Mostrar como se relaciona esta composición $\mathbf{b}''$ con la ley de adición de velocidades para boosts colineales deducida por Albert.

   vi. Mostrar que cuando $\mathbf{b}$ y $\mathbf{b}'$ no son colineales resulta $k(\mathbf{b}')k(\mathbf{b}) = k(\mathbf{b}''))h(\theta)$. Calcular los vectores $\mathbf{b}''$ y θ.

5. i. Mostrar que toda transformación de Lorentz cercana a la identidad $\Lambda^\mu_\nu = \epsilon^\mu_\nu$ ($\epsilon_{\mu\nu} = -\epsilon_{\nu\mu}$) se puede escribir como $\Lambda = \mathbb{I} + \omega$ donde $\omega = \frac{i}{2}\epsilon^{\rho\sigma}J_{\rho\sigma}$, siendo los generadores $J_{\rho\sigma}$

$$(J_{\rho\sigma})^\mu_\nu = -i(\delta^\mu_\rho \eta_{\sigma\nu} - \delta^\mu_\sigma \eta_{\rho\nu})\,,$$

   que satisfacen el álgebra de Lorentz $[J, J] = \eta J + \ldots$.

   ii. Considerar la acción del grupo de Lorentz sobre funciones escalares de x^μ, esto es $\phi'(x') = \phi(x)$ donde $x' = \Lambda x$. Mostrar que los operadores diferenciales $J_{\mu\nu} = i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu)$ satisfacen el álgebra de Lorentz y son una realización de la misma actuando sobre el espacio de funciones escalares. Expresar $\delta\phi(x) \equiv \phi(x') - \phi(x)$ en términos de dichos operadores diferenciales.

   iii. Considerar un campo espinorial de Dirac $\Psi(x)$ y mostrar que su variación puede escribirse como $\delta\Psi(x) = (\frac{i}{2}\epsilon^{\rho\sigma}J_{\rho\sigma})\Psi(x)$ donde $J_{\mu\nu} = i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu) + S_{\mu\nu}$ y $S_{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$.

6. i. Calcular la expresión para el boost en dirección arbitraria $B(\mathbf{b}) = e^K$ donde $K = \mathbf{b}\cdot\mathbf{K}$ para la representación $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ —esto es, donde $K_i = \frac{i}{2}J_{0i}$, con los J como en el inciso i. del problema anterior.

   ii. Mostrar que el boost así obtenido se puede escribir en términos de un boost según z como $B(\mathbf{b}) = R(\check{b})B(|\mathbf{b}|\check{z})R^{-1}(\check{b})$, donde $R(\check{b})$ es una rotación que lleva a z a la dirección $\check{b}$ del boost.