

# Mecánica Estadística II - Curso 2016

## Práctica 0: Repaso

### 1 Preguntas Previas

*Para que sirvan:* i) Chequee si puede responderlas *antes* de hacer los problemas. ii) Compruebe si efectivamente sabe/puede inferir las respuestas sin hablar con el docente. Solamente después de haberlas respondido verifique la respuesta, o busque una expansión de la misma o una forma más formal de encararla en una discusión con el docente. En una visión posterior –por ejemplo, al preparar el final de la materia– puede utilizar estas preguntas para tener una idea de algunos conceptos que deben saber.

- a ¿Qué es el límite termodinámico?
- b Para qué sirve transpirar? Explíquelo haciendo un paralelo entre la evaporación y la demagnetización adiabática.
- c Pensemos en el ‘gas’ de un encendedor lleno. Ubíquelo como un punto en una isoterma esquemática correspondiente a temperatura ambiente, en un gráfico presión vs. volumen. Si abrimos la válvula del encendedor escapará gas por el mechero: espera que el sistema se caliente/se enfríe/quede igual? Cada vez hay menos ‘gas’ en el artefacto: por qué la llama siempre es pareja? Trace cualitativamente la curva que recorre el sistema (hasta agotarse) en el diagrama  $p$  vs.  $V$ . A qué valor de presión decimos que se nos terminó el gas?
- d Al responder las preguntas anteriores: tuvo alguna importancia el hecho de que el gas se encontraba cerca una transición de fase? De qué orden es esa transición?
- e Usando análisis dimensional (y recordando que hay un logaritmo) escriba la expresión del potencial químico para un gas ideal clásico. Pistas: la simplicidad del problema limita enormemente el número de variables disponibles; existen dos cantidades con unidades de longitud? cómo debe ser el signo de  $\mu$  en este límite? ¿Qué sucede con  $\mu$  al bajar la temperatura? Solamente después de haberlo intentado, chequee si su respuesta coincide con la que dedujeron en el curso de MEI. Pensando en la forma del número de ocupación y la densidad de estados en función de la energía, dé un argumento que explique por qué  $\mu$  debe aumentar al bajar la temperatura para un gas de partículas conservadas.
- f Explique con un dibujo (por ejemplo, la entropía en función del volumen) por qué un sistema homogéneo puede dejar de ser estable.
- g Puede haber un bosón hecho de fermiones? En qué condiciones? Para responder esto último, interesa un argumento en que aparezca como cantidad central el tamaño del bosón. Enumere las diferencias que conoce que existen entre un átomo de He3 y otro de He4.
- h ¿Puede dibujar, sin consultar a nadie, el diagrama de fases estructurales de un material ‘regular’, por ejemplo, el Ar? ¿Qué curvas tienen un punto límite? ¿Cuáles no lo tienen? Dibuje a continuación (nuevamente, sin mirar) el diagrama de fases para el He3 y He4. Resalte sus principales diferencias.
- i Las interacciones entre partículas tendrán un efecto más drástico: ¿para un gas de bosones, para uno de fermiones, o no distinguirá la naturaleza de las partículas?
- j Para que ocurra la transición de Bose-Einstein ¿es importante que las partículas del gas se conserven?

## 2 Problemas

### 1. Transición de fase de primer orden

- Deducir en forma detallada la ecuación de Clausius-Clapeyron.
- Describir el funcionamiento de un termómetro de presión.
- Mirando el diagrama de fases del He: cómo es el cambio de entropía al pasar de líquido a sólido cuando  $T \rightarrow 0$ ?Cuál será entonces la entropía del líquido en ese límite?

### 2. Construcción de Maxwell.

Consideremos la ecuación de estado de van der Waals

$$pv^3 - (k_B T + bp)v^2 + av - ab = 0$$

Si se dibujara una isoterma en el plano  $p$ - $v$  es posible encontrar tres valores de  $v$  para una dado valor de  $p$ .

- Calcular la energía libre  $F(T, V)$  integrando  $-p(T, V)$  a lo largo de una isoterma con respecto de  $v$ . Ajustar la constante de integración dependiente de la temperatura comparando el resultado en el límite  $v \rightarrow \infty$  del resultado para el gas ideal.
  - Cómo se puede observar, la ecuación de estado de van der Waals predice una región donde la compresibilidad es negativa. ¿Cuál? ¿A qué se debe tal comportamiento?
  - La solución a este inconveniente es la construcción de Maxwell. ¿En qué consiste ésta solución?
  - Dado que en la región de inestabilidad coexisten dos fases, ¿qué condiciones se deben cumplir? Empleando estas condiciones justifique esta solución por integración de la relación  $v = (\partial\mu/\partial p)_T$ .
  - En qué región el sistema homogéneo es localmente estable, pero no lo es globalmente?
3. Dado el calor latente  $L = 22\text{kJ/Kg}$  y el calor específico  $c_p \simeq 2.5\text{kJ/kgK}$  a 4K del He: estimar (suponer que la capacidad calorífica  $C_p = \text{cte}$ ) cuántos litros de He líquido hay que evaporar para bajar la temperatura de 1l de He4 en 1K a? Comparar con el caso del agua a 300K: cuánta agua hay que evaporar para bajar a 299K?.  $L_{H_2O} = 2270\text{kJ/kg}$ ,  $C_{p,H_2O} = 1.996\text{kJ/kgK}$

### 4. Repaso de gas ideal de bosones.

- Mostrar que la existencia de un condensado depende de la convergencia o no de la integral  $\int_0^\infty d^D p / \varepsilon(p)$ , donde  $D$  es la dimensionalidad y  $\varepsilon(p)$  la relación de dispersión del sistema. Analice los casos más interesantes en función de  $D$ .
- Ausencia de fragmentación en el Gas de Bose ideal:* muestre que el primer estado excitado tiene una población subextensiva. Para ello evalúe el gap de energía como función del tamaño, y luego su población debajo de la transición en el límite que corresponde.
- Obtenga las ecuaciones de estado de un gas de bosones en tres dimensiones.
- ¿Cuál es la ecuación que determina la región de transición?. Para  $T < T_c$  se puede pensar al sistema como una mezcla de dos fases. ¿Cuáles? Determinar las fracciones de ambas fases como función de  $T/T_c$ .
- ¿Cómo se anula  $C_p$  cuando  $T \rightarrow 0$ ?. Marcar diferencias con el caso de He.
- Determinar el comportamiento del calor específico y de la fracción condensada cerca de la transición. Comparar con lo determinado para el He líquido cerca de la transición  $\lambda$ .

### 5. Gas de Bose con un grado de libertad interno.

Considere un gas ideal de Bose-Einstein en tres dimensiones, compuesto de moléculas independientes de masa  $m$ . Como ocurre en los sistemas reales, estas tienen grados de libertad internos. Por simplicidad, consideraremos que los bosones en el estado fundamental tienen energía  $\epsilon_0 = p^2/2m$  y en el estado

excitado  $\epsilon_1 = p^2/2m + \Delta$ . Calcule la temperatura de condensación para  $\Delta \gg kT_c^0$  y para  $\Delta \ll kT_c^0$ , donde  $T_c^0$  es la temperatura de condensación del gas sin considerar el grado de libertad interno. La existencia de un grado interno de libertad, ¿aumenta o disminuye la temperatura de condensación? *Ayuda: en un apéndice del Pathria puede encontrar formas asintóticas para  $g_{\frac{3}{2}}(z)$  que serán de utilidad.*

## 6. La condensación de Bose en un gas ideal como una transición de fase de primer orden.

La condensación de Bose suele ser entendida como una transición de fase. La misma es muy especial, dado que no hay interacciones entre partículas (veremos luego que la transición se hace de segundo orden al incluir interacciones). Vista desde las ecuaciones de estado, la transición no es muy distinta de la que sucede durante la condensación de un gas ( $g$ , en este caso el gas de Bose) en un líquido ( $l$ , el condensado conformado por partículas de impulso nulo).

- Aún siendo cierto lo anterior, explique por qué suele decirse que la condensación sucede en el espacio de impulsos, y no necesariamente en el de posiciones.
- Muestre que, para temperaturas  $T < T_c$  (o volúmenes específicos  $v = V/N < v_c$ ) la presión depende solamente de la temperatura.
- Dibuje la curva crítica  $P$  vs.  $v_c$ , y una isoterma  $P$  vs.  $v$ . Compare a esta última con las isotermas que se obtienen para una transición líquido-gas en la región de coexistencia.
- Pese a que el volumen por partícula  $v$  puede variar continuamente a lo largo de una isoterma en una transición de fase primer orden, lo que sucede en realidad es que  $v = x_l v_l + (1 - x_l)v_g$ , siendo las  $x_i = N_i/N$  las fracciones, y los  $v_i$  los volúmenes específicos (distintos) de cada fase. ¿Cuánto valdrían en el caso de la transición de Bose  $v_g$  (el volumen específico del gas de Bose usual) y  $v_l$  (el correspondiente a las partículas en el condensado)? Vincular esto último con lo encontrado en el punto b) Evaluar el cambio discontinuo que sufre el volumen específico,  $\Delta v = v_l - v_g$ . Identificar para este caso  $x_l$  y  $x_g$ .
- Utilizando la ecuación de Clausius–Clapeyron sobre la curva de coexistencia  $P_c(T)$  de un gas ideal de Bose–Einstein y conociendo  $\Delta v$  del punto anterior, encuentre la discontinuidad en la entropía  $\Delta S$  al cruzar la línea de transición  $P_c(T)$ . (Este cambio en la entropía coincide con el que calculamos en la teoría a partir de la entropía, con lo que la interpretación de la condensación de Bose como una transición de fase de primer orden es consistente).

## 7. Anomalías en el gas ideal de Bose.

El gas ideal de Bose es un ejemplo muy artificial, por lo que que presenta una serie de anomalías relacionadas con el condensado. No obstante ello, las ideas generales que se desprenden de este modelo permanecen al incluir interacciones, y las anomalías (algunas de las cuales estudiaremos aquí) se corrigen.

- Muestre que, a diferencia del diagrama de fases real para el He, el condensado no existe en toda una región del plano  $p$  vs.  $T$ , sino solamente a lo largo de una curva  $p(T)$ .
- No extensividad del gas para  $T < T_c$ .*
  - Muestre que en el ensamble Gran Canónico las fluctuaciones de  $N_0$  —el número de partículas en el condensado— para el gas ideal son tan grandes como  $N$ .
  - En el gas ideal, las condiciones de borde juegan un rol muy importante en las propiedades del condensado. Por ejemplo, muestre que el perfil de densidad de partículas para  $T = 0$  es notablemente distinto si consideramos condiciones de contorno periódicas o cerradas.
  - ¿Cuál de estos dos perfiles de densidad será el que se asemeje más al caso real si tenemos en cuenta un potencial interatómico tipo Lennard-Jonnes, *repulsivo* a distancias cortas?

## 8. Interacciones y condensación de Bose.

Consideremos un sistema formado por dos bosones libres contenidos en un recipiente de volumen  $V$ . Si denotamos por  $\mathbf{p}$  y  $\mathbf{q}$  los momentos de ambas partículas y consideramos condiciones de contorno periódicas.

(a) Encontrar las funciones de onda normalizadas  $\psi_{\mathbf{p},\mathbf{q}}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  para ambos casos  $\mathbf{p} \neq \mathbf{q}$  y  $\mathbf{p} = \mathbf{q}$ .

(b) Mostrar que para  $\mathbf{p} \neq \mathbf{q}$

$$|\psi_{\mathbf{p},\mathbf{q}}(\mathbf{r}, \mathbf{r})|^2 > |\psi_{\mathbf{p},\mathbf{p}}(\mathbf{r}, \mathbf{r})|$$

(c) Explicar el significado de la afirmación "repulsión espacial conduce a atracción en el espacio de momentos".

(d) De acuerdo a este resultado: espera que las interacciones ayuden o estorben a la formación de un condensado? A la vez: si hay interacciones, pueden *todas* las partículas tener el mismo impulso? (Pensar si el impulso es un buen número cuántico, y luego ver cómo se relaciona con lo anterior).

### 9. Problema adicional; la influencia del campo gravitatorio en la transición de Bose.

Se ha comentado en la teoría sobre el hecho de que el exponente crítico  $\alpha$  de la transición lambda se ha medido en un experimento realizado en el trasbordador espacial. Veremos ahora por qué eso es necesario.

Considere un gas ideal de Bose en un campo gravitacional uniforme de aceleración  $g$ . Mostrar que la temperatura crítica  $T_c$  depende ahora de la altura del líquido respecto de una referencia,  $L$ , de modo que un recipiente mostrará un continuo de transiciones de fase (esto es, una transición ensanchada). Dar una expresión para  $T_c(L)$ .