Mecánica Estadística II - Curso 2016
Práctica 7: Teoría de Landau

1 Preguntas previas.

a Explique cómo pasar de variables cuantizadas (ej. la posición R_j del spin σ_j en una red, la proyección de spin, etc.) a las variables continuas que caracterizan a la teoría de Landau.

b Piense en el proceso de ensamblado de la energía de Landau: ¿incluye alguna contribución entrópica?

c Las transiciones de fase se caracterizan por la presencia de no analiticidades. Sin embargo, suponemos una energía de Landau (pensada para describir estas transiciones) analítica al realizar un desarrollo de Taylor de la misma. Explique estas contradicciones aparentes.

ch La construcción de la energía libre de Landau presupone un campo $\phi(x)$ que no puede variar en distancias microscópicas. A la vez, se presuponen interacciones de corto alcance (microscópicas). ¿Existirá entonces alguna relación entre lo que ocurre en dos puntos distintos x y x'? Ejemplifique.

d Explique qué criterios se utilizan para decidir la forma de los coeficientes de un desarrollo de Landau. ¿Por qué suele fijarse el correspondiente al gradiente? ¿Cómo se sabe a qué temperatura ocurrirá una transición, o si esta ocurre realmente? ¿Cómo se garantiza la estabilidad del sistema?

e La teoría de Landau para un sistema homogéneo recupera los resultados de campo medio al realizar en dos etapas el método del punto de ensilladura. Explique en qué consisten esas etapas.

f Defina el parámetro de orden para un antiferromagneto de Heisenberg, y su campo conjugado. ¿Cuáles son las simetrías presentes, reflejadas en los estados fundamentales posibles? Explique por qué espera que el primer término en B de un desarrollo de Landau sea cuadrático en el campo. ¿Cómo debe ser su coeficiente?

g Nuevamente para el caso antiferro: ¿espera una dependencia fuerte en el campo para el parámetro de orden?

h Explique en los casos ferro y antiferromagnético si puede esperar que ocurra una transición de fase cuando hay un campo B aplicado. Explique la forma de Curie-Weiss para ambos casos, pensando en los campos conjugados. ¿Qué susceptibilidad podría diverger en el caso antiferro?

i ¿Qué tipo de potencial imagina que puede dar lugar al campo conjugado del parámetro de orden superfluido?

j En el contexto de la superconductividad: ¿ espera que la energía del condensado sea proporcional al número de partículas condensadas? ¿Espera que la entropía lo sea?

k Liste y explique el significado de tres cantidades, relevantes para la superconductividad, con unidades de longitud. De un argumento que explique semicuantitativamente la estabilidad de los superconductores de dos tipos (I y II). ¿Cómo puede favorecerse la superconductividad de tipo II?

l Enuncie el criterio de Guinzburg. ¿ Es la superconductividad convencional generalmente bien descripta por la teoría de Landau? Ejemplifique y explique por qué.

2 Problemas.

1. La teoría de Landau es una teoría de campo medio fenomenológica que describe el comportamiento cerca de la transición de fase. En el caso de un superconductor, donde los electrones en la fase superconductora (homogénea) están descritos por una función de onda macroscópica, $\psi(\vec{r})$, la energía libre de Landau es,
$$f_L = f_s(T) - f_n(T) = a(T)|\psi(\vec{r})|^2 + \frac{b(T)}{2}|\psi(\vec{r})|^4,$$
donde $a(T) = a_0(T - T_c)$ y $b(T) > 0$.
   (a) Graficar $f_s(T) - f_n(T)$ para $T > T_c$ y $T < T_c$. ¿A qué se llama *energía de condensación*?
   (b) Determinar la fracción superconductora como función de la temperatura y graficarla. ¿Aumenta la energía de condensación linealmente con la fracción de partículas que han condensado? Interprete el resultado en términos de lo que sabe de la teoría BCS.
   (c) Determine la entropía como función de T y muestre que S es continua. ¿Qué tipo de transición implica este resultado? ¿Disminuye la entropía linealmente con la densidad de partículas superfluidas?
   (d) Determinar el calor específico para la fase superconductora y mostrar que es discontinuo en $T = T_c$.
   (e) Al aplicar un campo magnético igual al campo crítico H_c, la fase superconductora debe dejar lugar a la fase normal. Igualando las energías libres respectivas, y suponiendo que la fase normal es muy débilmente magnética, escriba la energía de condensación *a campo cero* en términos del campo crítico H_c.
   (f) La entropía por partícula de la fase normal y de la fase superconductora son prácticamente independientes del campo aplicado (por qué?) Utilizando ese hecho, muestre que con la aplicación de un campo magnético aplicado la transición superconductora se hace de 1er orden.

2. Consideremos un sistema con una expresión para la energía libre de Landau de la forma
$$F_L(t, m) = -h\,m + q(t) + r(t)m^2 + s(t)m^4 + u(t)m^6$$
con $u(t)$ es una constante fija positiva.

   a) Minimizar $F_L(t, m)$ con respecto a la variable m y examinar la magnetización espontánea m_0 como función de los parámetros r, s. En particular, mostrar lo siguiente:

   a) Para $r > 0$ y $s > -(3ur)^{1/2}$,$m_0 = 0$ es la única solución real.

   b) Para $r > 0$ y $-(4ur)^{1/2} < s \le -(3ur)^{1/2}$,$m_0 = 0$ o $\pm m_1$, donde $m_1^2 = \frac{\sqrt{s^2-3ur}-s}{3u}$. Sin embargo, el mínimo de F_L en $m_0 = 0$ es más bajo que el mínimo en $m_0 = \pm m_1$, entonces el valor de equilibrio es $m_0 = 0$.

   c) Para $r > 0$ y $s = -(4ur)^{1/2}$, $m_0 = 0$ 0 $\pm(r/u)^{1/4}$. Ahora el mínimo de F_L a $m_0 = 0$ es de igual valor de que a $m_0 = \pm(r/u)^{1/4}$, tal que un valor de magnetización espontánea tiene igual peso a un valor nulo.

   d) Para $r > 0$ y $s < -(4ur)^{1/2}$, $m_0 = \pm m_1$. ¿Que tipo de transición es?. Identifique la línea crítica de primer orden.

   e) Para $r = 0$ y $s < 0$, $m_0 = \pm(2|s|/3u)^{1/2}$.

   f) Para $r < 0$, $m_0 = \pm m_1$ para todo s.

   g) Para $r = 0$ y $s > 0$, $m_0 = 0$ es la única solución. Combinando este resultado con el del punto (f), concluir que la línea $r = 0$, con $s > 0$ es una *línea de transición de segundo orden*. Las líneas de primer orden y segundo orden se juntan en el punto $r = 0, s = 0$, conocido como punto tricrítico.

3. Siguiendo el problema anterior, fijar $s = 0$ y aproximarse al punto tricrítico a lo largo del eje r, parametrizando $r \sim r_1, t$. Mostrar que los exponentes pertenecientes al punto tricrítico de este modelo son
$$\alpha = 1/2, \beta = 1/4, \gamma = 1, \ y \ \ \delta = 5.$$

4. Antiferromagnetismo.

   a) Desarrollar la energía libre de Landau en términos del parámetro de orden $\vec{L} = \vec{M}_1 - \vec{M}_2$ (magnetización de las subredes), incluyendo un término de interacción con el campo y otro que tenga en cuenta la respuesta de la fase paramagnética.

   b) Obtener la susceptibilidad para $T < T_N$ para campos paralelo y perpendicular al parámetro de orden $\vec{L}$.

   c) Suponga que existe una densidad de energía de anisotropía A, que intenta fijar el eje de cuantificación de los espines en una dada dirección cristalina. Comparando esta energía con la energía Zeman $-\vec{B}.\vec{M}$ estime el campo al que ocurrirá la transición de spin-flip (estado ferromagnético forzado).

   d) Transición spin-flop: A bajos campos dominan los términos de anisotropía y de exchange. ¿ Qué sucede a medida con los momentos magnéticos con el aumento del campos externo? ¿Cómo se van acomodando (clásicamente) los momentos magnéticos?. Cuál es la configuración que dominaría a partir de un cierto campo?.

5. Punto tricrítico: Considere el modelo de Blume-Emery-Griffiths (BEG) como modelo de una mezcla de ^{4}He y ^{3}He. El Hamiltoniano del modelo está dado por

$$H = -J \sum_{\langle ij \rangle} S_i \, S_j + \Delta \sum_i S_i^2$$

   donde los spins $S_i = 0$ o ± 1 ocupan una red tridimensional con número de coordinación q. La conexión entre este Hamiltoniano "magnético" y la mezcla de ^{4}He y ^{3}He consiste en identificar $S_i = \pm 1$ con de ^{4}He y $S_i = 0$ con los átomos de ^{3}He. El parámetro Δ la diferencia entre los potenciales químicos $\mu_3 - \mu_4$ entre ambas fases.

   a) Siendo $m = \langle S_i \rangle$ el parámetro de orden. Determine la matriz densidad en campo medio en término de producto de matrices independientes $\hat{\rho} = \prod_i \hat{\rho}_i$ y muestre que

$$\hat{\rho}_i(S_i) = \frac{\exp\{\beta(qJmS_i - \Delta S_i^2)\}}{1 + 2e^{-\beta\Delta} \cosh \beta qJm}.$$

   b) Con el resultado previo, escriba la energía libre y muestre que

$$\langle S_i^2 \rangle = \frac{2e^{-\beta\Delta} \cosh \beta qJm}{D}$$

   con $D = 1 + 2e^{-\beta\Delta} \cosh \beta qJm$.

   c) A partir del resultado anterior desarrolle (hasta orden m^6) la energía libre y obtenga la teoría de Landau del modelo. Compare el diagrama de fases obtenido con el de una mezcla de ^{4}He y ^{3}He (ver figura 1). ¿Con qué configuraciones de spin se identificará la fase superfluida, y por qué?

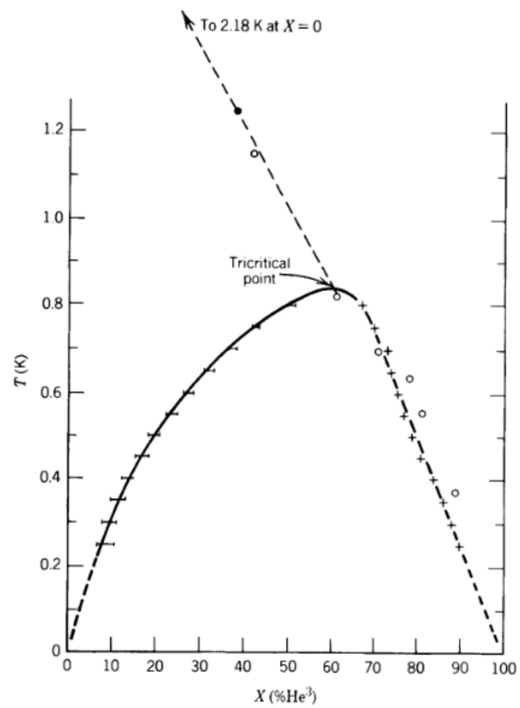

Figure 1: Diagrama de fases experimantal de la mezcla de ^{4}He-^{3}He