Mecánica Estadística II - Curso 2015
Práctica 2: Repaso Estadística Cuántica - Condensados de Bose

14 de Septiembre de 2015

Cuando tratamos con sistemas cuánticos, solemos representar un microestado por un vector de un espacio de Hilbert, mientras que el estado macroscópico se representa mediante el operador (o matriz) densidad.

$$\hat{D} = \sum_{\lambda} |\psi_\lambda\rangle\langle\psi_\lambda|$$

donde p_{lambda} es la probalbilidad del microestado $|\psi_\lambda\rangle$, y por tanto $\sum_\lambda p_\lambda = 1$. Los elementos diagonales de este operador en una base ortonormal $|u_n\rangle$, D_{u_n,u_n}, son las llamadas poblaciones asociadas a esa base, mientras que los elementos no diagonales D_{u_n,u_m} son las coherencias. El valor medio de un observable en un sentido general (que combina tanto a los valores esperados cuánticos como al promedio estadístico clásico) puede escribirse $\langle A\rangle = \mathrm{Tr}(\hat{D}\hat{A})$.

1. **Operador Densidad de un subsistema** Tanto en mecánica cuántica como en estadística, muchas veces (siempre) estamos interesados en estudiar solamente una parte de un sistema mayor. Lo que entendamos por “subsistema” variará de acuerdo al problema. Podrá ser efectivamente un sistema separado físicamente del resto, como en el caso de un material en contacto con un termostato, o el de un sistema cuántico bajo estudio que está siendo ”medido” por un aparato. Sea un espacio de Hilbert $\varepsilon_{\mathcal{H}} = \varepsilon^a_{\mathcal{H}} \otimes \varepsilon^b_{\mathcal{H}}$, producto directo de dos espacios generados respectivamente por las bases $\{|k_a\rangle\}$ y $\{|l_b\rangle\}$.

   (a) Muestre que el promedio $\langle\hat{A}_a\rangle = \mathrm{Tr}(\hat{D}\hat{A}_a))$, donde el operador $\hat{A}_a$ actúa sobre la base $\{|k_a\rangle\}$ puede escribirse como una traza sobre el espacio vectorial $\varepsilon^a_{\mathcal{H}}$

   (b) Comprobar que cuando el operador densidad de un sistema de entidades distinguibles puede escribirse como producto de operadores de los subsistemas que lo componen $\hat{D} = \prod_i \hat{D}_i$, los resultados de las medidas parciales en un subsistema dado no se ven afectadas por el macroestado particular de los otros subsistemas. (Cuando $\hat{D}$ no puede escribirse como un producto, decimos que los subsistemas están correlacionados cuánticamente o entrelazados).

2. **Poblaciones, coherencias, e interferencia cuántica.** Sea un observable $\hat{A}$ cuyos autoestados $\{|a_j\rangle, \hat{A}|a_j\rangle = a_j|a_j\rangle\}$, conforman una base ortonormal del espacio de estados. Sea otro observable $\hat{B}$, con una base ortonormal de autoestados $\{|b_i\rangle\}$, tal que $[\hat{A},\hat{B}] \neq 0$. Supondremos que p_1 y p_2 son dos números reales y positivos, con $p_1 + p_2 = 1$.

   (a) Tenemos un sistema que se encuentra en el estado dado el por $|\Psi\rangle = \sqrt{p_1}|a_1\rangle + \sqrt{p_2}|a_2\rangle$, mientras el estado de otro sistema está descripto por el operador densidad $\hat{D} = |a_1\rangle p_1\langle a_1| + |a_2\rangle p_2\langle a_2|$. Encontrar $P(a_1)$ (la probabilidad de medir el autovalor a_1) y $P(a_2)$ en ambos sistemas.

   (b) Utilizando los ingredientes dados al comienzo del problema (esto es, pensando en realizar medidas de los observables $\hat{A}$ y $\hat{B}$) muestre una diferencia escencial entre ambos estados. Ayuda: piense en el fenómeno de interferencia cuántica.

   (c) Escribir el operador densidad $\hat{D}'$ (notar que es único: a diferencia de los vectores de estado, no hay fases globales) que tenga el mismo contenido físico que el $|\Psi\rangle$. Calcular las poblaciones $\hat{D}'_{a_j a_j}$ y las coherencias $\hat{D}'_{a_j a_k}$ de este operador. Escribir $P'(a_1)$ y $P'(b_i)$ en términos de las anteriores. Calcular poblaciones y coherencias del operador $\hat{D}$, y comparar con las de $\hat{D}'$.

(d) Supongamos ahora que el sistema está descripto por un operador densidad más general, $\hat{D} = \sum_\lambda |\Psi_\lambda\rangle \, p_\lambda \langle\Psi|$ i) Muestre que las poblaciones $\hat{D}_{a_j a_j}$ seguirán siendo positivas. ii) Si midiera N veces el observable $\hat{A}$, en N sistemas idénticos preparados en idénticas condiciones ¿En cuántos sistemas espera medir el autovalor a_j? iii) ¿Puede decirse algo a priori del valor de las coherencias?

3. Consideremos el elemento de matriz en la representación de coordenadas de la matriz densidad $\rho_1(\vec{r}, \vec{r}') = N\langle\vec{r}|\hat{D}_1|\vec{r}'\rangle$, donde $\hat{D}_1$ es la matriz reducida de una partícula.

   (a) ¿Bajo que condiciones se satisface $\rho_1(\vec{r}, \vec{r}') = \rho_1(\vec{r} - \vec{r}')$?.

   (b) En esas condiciones y considerando partículas no interactuantes muestre que $\rho_1(\vec{r} - \vec{r}')$ se puede escribir como la anti-transformada de Fourier del número de particulas en el espacio de momentos.

   (c) Muestre que $\rho_1(\vec{r} - \vec{r}') = \frac{N}{V} e^{-\pi|\vec{r}-\vec{r}'|^2/\lambda_T}$. ¿Cuál es el significado de λ_T?.

   (d) En el caso de partículas bosónicas, ¿ cuál es el límite $|\vec{r} - \vec{r}'| \to \infty$ de $\rho_1(\vec{r} - \vec{r}')$?. ¿Qué interpretación tiene?

4. **Interferencia en ondas de materia.** La figura 1 muestra la densidad de dos condensados de Bose -Einstein que se mueven el uno hacia el otro (arriba-abajo) y comienzan a superponerse. Las franjas de interferencia tiene un espaciado de 1.5×10^{-5}cm. Encontrar la velocidad relativa entre los dos condensados.

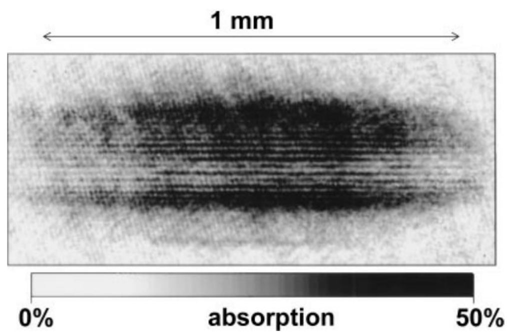

Figure 1:

Límite clásico: Consideremos un sistema clásico de N partículas. En mécanica clásica el estado del sistema queda definido por el conjunto de coordenadas generalizadas e impulsos generalizados: $\{q^{3N}, p^{3N}\}$ ($q^{3N} \equiv \{q1...q3N\}$, y análogamente p^{3N}) que definen los estados microscópicos o microestados. Se define la función densidad de probabilidad $D_N(q^{3N}, p^{3N})$ tal que la probabilidad de encontrar al sistema en un vol. $d\tau_N$ en torno al punto $\{q^{3N}, p^{3N}\}$ del espacio de fases está dada por

$$D_N(q^{3N}, p^{3N}) d\tau_N \equiv$$

.

Para un sistema de N partículas idénticas, se definen las distribuciones reducidas de $n < N$ partículas mediante

$$f_n(\mathbf{r}^n, \mathbf{p}^n, t) = \frac{1}{h^{3n}} \int d\tau_{N-n} D_N(\mathbf{r}^N, \mathbf{p}^N, t)$$

5 Usando la definición previa determine en términos de las distribuciones reducidas:

   (a) La densidad de una partícula $\rho_1(\vec{r})$ y la correlación de pares $\rho_2(\vec{r}, \vec{r}')$. ¿que sucede en el caso de un sistema homogéneo?.

   (b) calcular $\rho_1(\vec{r})$ para el caso de un gas ideal en un campo gavitatorio externo. Suponiendo una atmósfera isotérmica: ¿hasta que altura se podría sobrevivir suponiendo que el cuerpo se puede adaptar hasta una presión de 380mbar?.

(c) Dado un gas clásico interactuante con Hamiltoniano dado por

$$H = \sum_i \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m} + \sum_{i<j}^{N} v(\vec{r}_i, \vec{r}_j)$$

Calcular $\langle H \rangle = U$ en función de $\rho_1(\vec{r})$ y $\rho_2(\vec{r}, \vec{r}')$.

(d) Calcular $\rho_2(\vec{r}, \vec{r}')$ para un gas ideal en el ensamble Canónico y Gran canónico. Explicar las diferencias.