Mecánica Estadística II - Curso 2015
Práctica 1: Modelo de dos fluidos

31 de Agosto de 2015

El comportamiento hidrodinámico del Helio II puede ser explicado por el modelo de dos fluidos de Tisza, que postula la coexistencia de dos componentes para $T < T_c$

* Una componente normal de densidad ρ_n moviendose a velocidad v_n con una densidad de entropía finita s_n.

* Una componente superfluída de densidad ρ_s, que fluye sin viscosidad, sin vorticidad y posee entropía nula $s_s = 0$.

Las ecuaciones hidrodinámicas de las que se desprenden los resultados más relevantes están dadas por

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \mathbf{J}, \quad \text{ecuación de continuidad} \tag{1}$$

$$\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} + f(v) = -\nabla p, \quad \text{ecuación de Euler} \tag{2}$$

donde ρ es la densidad total, $\mathbf{J}$ es la densidad de corriente de masa, v la velocidad del fluido y p es la presión. Si las velocidades de los dos fluidos no son muy grandes se puede aproximar $f(v) \approx 0$.

1. **Modelo de Tisza**

   (a) Obtenga las ecuaciones de movimiento para los dos componentes, normal y superfluido, en terminos de la presión, la entropía, la temperatura, y la viscosidad.

2. **Efecto termomecánico.**

   (a) Considerando despreciable la viscosidad del fluido normal, utilice el resultado obtenido en el ejercicio anterior para determinar el cambio en la temperatura ΔT como función de la variación de presión ΔP. Discuta las implicancias de este resultado (ver figura 1).

   (b) Compare el resultado obtenido con el gas de bosones calculando la pendiente $S(T)$ en el régimen condensado.

3. **Propagación de sonido.** Empleando las ecuaciones (1) y (2), y considerando como variables independientes la densidad ρ y la entropía S encuentre las ecuaciones de onda para ρ y S.

4. **Vórtices** Consideremos una función de onda de la forma $\psi = e^{i\phi(x)}$ en donde la phase $\phi(x)$, veremos, describe el comportamiento del superfluído.

   (a) Identifique que simetría posee dicha función de onda.

   (b) Determine la velocidad asociada al sistema en términos de la fase $\phi(x)$.

   (c) Suponga que el fluido fluye en un circulo. Calcule la circulación de la velocidad y muestre que ésta está cuantizada.

   (d) Un átomo de He está circulando alrededor de una linea de vórtice. Muestre que su momento angular es múltiplo de $\hbar$

5. **Más vórtices**

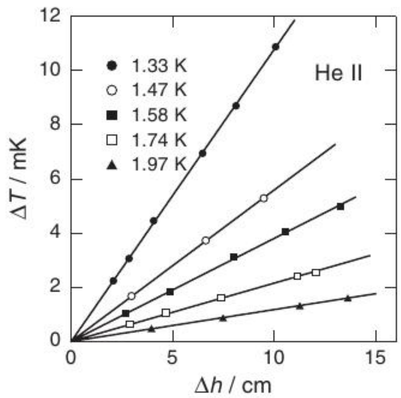

Figure 1:

(a) Calcule el número de vórtices en un recipiente con un diámetro $d = 2cm$ que rota con una velocidad angular de $\omega = 1/s$.

(b) Estime la densidad de vórtices debida a la rotación de la tierra.

6. La cualidad más visible del He II es su capacidad de trepar por las paredes del recipiente que lo contiene (ver figura 2). La razón es que este recubre las paredes con una fina película. A una dada altura z en encima de la superficie del líquido (en equilibrio con su vapor), la película adherida a la pared vertical tiene un espesor proporcional a $z^{-1/2}$. Derivar este resultado con la siguiente ayuda.

   (a) Suponga una temperatura tal que la fracción de superfluído es f. Considere un elemento del fluído adherido a una altura z, de espesor d y altura Δz, y ancho igual a 1 en la otra dirección. Considerando al elemento de volumen como una gas de de bosones libres, escribir su energía, con las contribuciones de energía potencial, gravitatoria y cinética.

   (b) Minimizar la energía respecto de d

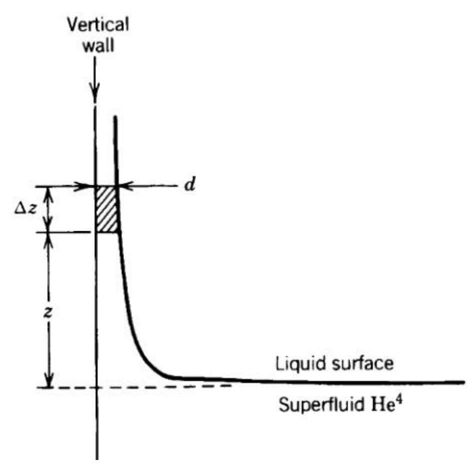

Figure 2:

7. Ausencia de fragmentación en el Gas de Bose ideal. Mostrar que el primer estado excitado tiene una población subextensiva.