

Mecánica Estadística II - Curso 2015

Práctica 0: Repaso

20 de Agosto de 2015

1. Transición de fase de primer orden

- Deducir en forma detallada la ecuación de Clausius-Clapeyron.
- Describir el funcionamiento de un termómetro de presión.
- Mirando el diagrama de fases del He: cómo es el cambio de entropía al pasar de líquido a sólido cuando $T \rightarrow 0$? Cuál será entonces la entropía del líquido en ese límite?

2. Construcción de Maxwell. Consideremos la ecuación de estado de van der Waals

$$pv^3 - (k_B T + bp)v^2 + av - ab = 0$$

Si se dibujara una isoterma en el plano p - v es posible encontrar tres valores de v para un dado valor de p .

- Calcular la energía libre $F(T, V)$ integrando $-p(T, V)$ a lo largo de una isoterma con respecto de v . Ajustar la constante de integración con dependiente de la temperatura comparando el resultado en el límite $v \rightarrow \infty$ del resultado para el gas ideal.
 - Cómo se puede observar, la ecuación de estado de van der Waals predice una región donde la compresibilidad es negativa. ¿Cuál? ¿A qué se debe tal comportamiento?
 - La solución a este inconveniente es la construcción de Maxwell. ¿En qué consiste ésta solución?
 - Dado que en la región de inestabilidad coexisten dos fases, ¿qué condiciones se deben cumplir? Empleando estas condiciones justifique esta solución por integración de la relación $v = (\partial\mu/\partial p)_T$.
3. Dado el calor latente $L = 22\text{kJ/Kg}$ y el calor específico $c_p \simeq 2.5\text{kJ/kgK}$ a 4K del He: estimar (suponer $C_p = \text{cte}$) cuántos litros de He líquido hay que evaporar para bajar su T en 1K? Comparar con el caso del agua a 300K (cuanta agua hay que evaporar para bajar a 299K). $L_{H_2O} = 2.270\text{kJ/kg}$, $c_{p,H_2O} = 1.996\text{kJ/kgK}$.
4. Repaso de gas ideal de bosones.

- Mostrar que la existencia de un condensado depende de la convergencia o no de la integral $\int_0^{\infty} d^D p / \varepsilon(p)$, donde D es la dimensionalidad y $\varepsilon(p)$ la relación de dispersión del sistema. Analice los casos más interesantes.
- Existirá una *transición* de BE para un gas ideal de bosones no conservados?
- Obtenga las ecuaciones de estado de un gas de bosones en tres dimensiones.
- ¿Cuál es la ecuación que determina la región de transición?. Para $T < T_c$ se puede pensar al sistema como una mezcla de dos fases. ¿Cuáles? Determinar las fracciones de ambas fases como función de T/T_c .
- ¿Cómo se anula C_p cuando $T \rightarrow 0$?. Marcar diferencias con el caso de He.
- Determinar el comportamiento del calor específico y de la fracción condensada cerca de la transición. Comparar con lo determinado para el He líquido cerca de la transición λ .

5. La condensación de Bose como una transición de fase de primer orden. La condensación de Bose suele ser entendida como una transición de fase - muy especial, dado que no hay interacciones entre partículas- de primer orden. Vista desde las ecuaciones de estado, esta no es muy distinta de la que sucede durante la condensación de un gas (g , en este caso el gas de Bose) en un líquido (l , el condensado conformado por partículas de impulso nulo).
- Aún siendo cierto lo anterior, explique por qué suele decirse que la condensación sucede en el espacio de impulsos, y no necesariamente en el de posiciones.
 - Muestre que, para temperaturas $T < T_c$ (o volúmenes específicos $v = V/N < v_c$) la presión depende solamente de la temperatura.
 - Dibuje la curva crítica P vs. v_c , y una isoterma P vs. v en el intervalo $(0, v_c)$. Compare a esta última con las isothermas que se obtienen para una transición líquido-gas en la región de coexistencia.
 - Pese a que el volumen por partícula v puede variar continuamente a lo largo de una isoterma en una transición de fase primer orden, lo que sucede en realidad es que $v = x_l v_l + (1 - x_l)v_g$, siendo las $x_i = N_i/N$ las fracciones, y los v_i los volúmenes específicos (distintos) de cada fase. ¿Cuánto valdrían en el caso de la transición de Bose v_g (el volumen específico del gas de Bose usual) y v_l (el correspondiente a las partículas en el condensado)? Vincular esto último con lo encontrado en el punto b) Evaluar el cambio discontinuo que sufre el volumen específico, $\Delta v = v_l - v_g$. Identificar para este caso x_l y x_g .
 - Utilizando la ecuación de Clausius–Clapeyron sobre la curva de coexistencia $P_c(T)$ de un gas ideal de Bose–Einstein y conociendo Δv del punto anterior, encuentre la discontinuidad en la entropía ΔS al cruzar la línea de transición $P_c(T)$. (Este cambio en la entropía coincide con el que calculamos en la teoría a partir de la entropía, con lo que la interpretación de la condensación de Bose como una transición de fase de primer orden es consistente).
6. Anomalías en el gas Ideal. El gas ideal de Bose es un ejemplo muy artificial, por lo que que presenta una serie de anomalías relacionadas con el condensado. No obstante ello, las ideas generales que se desprenden de este modelo permanecen al incluir interacciones, y las anomalías (algunas de las cuales estudiaremos aquí) se corrigen.
- Muestre que, a diferencia del diagrama de fases real para el He, el condensado no existe en toda una región del plano p vs. T , sino solamente a lo largo de una curva $p(T)$.
 - No extensividad del gas para $T < T_\lambda$.
 - Muestre que en el ensamble Gran Canónico las fluctuaciones de N_0 —el número de partículas en el condensado— para el gas ideal son tan grandes como N .
 - En el gas ideal, las condiciones de borde juegan un rol muy importante en las propiedades del condensado. Por ejemplo, muestre que el perfil de densidad de partículas para $T = 0$ es notablemente distinto si consideramos condiciones de contorno periódicas o cerradas. Cuaál de estos dos perfiles de densidad será el que se asemeje más al caso real si suponemos densidades similares a las del He líquido y tenemos en cuenta un potencial ineratómico tipo Lennard-Jonnes?
7. Interacciones y condensación de Bose. Consideremos un sistema formado por dos bosones libres contenidos en un recipiente de volumen V . Si denotamos por \mathbf{p} y \mathbf{q} los momentos de ambas partículas y consideramos condiciones de contorno periódicas.
- Encontrar las funciones de onda normalizadas $\psi_{\mathbf{p},\mathbf{q}}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ para ambos casos $\mathbf{p} \neq \mathbf{q}$ y $\mathbf{p} = \mathbf{q}$.
 - Mostrar que para $\mathbf{p} \neq \mathbf{q}$

$$|\psi_{\mathbf{p},\mathbf{q}}(\mathbf{r}, \mathbf{r})|^2 > |\psi_{\mathbf{p},\mathbf{p}}(\mathbf{r}, \mathbf{r})|$$
 - Explicar el significado de la afirmación "repulsión espacial conduce a atracción en el espacio de momentos".