Mecánica Estadística II - Curso 2019
Práctica 8: Integral funcional

1. **** Integral funcional en Mecánica Cuántica: Formulación de Feynmann**

   Considere un sistema cuántico con un grado de libertad con Hamiltoniano $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x})$.

   (a) Muestre que el propagador $K(x_f, t_f; x_i, t_i) = \langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle$ es la función de Green de la ecuación de Schroedinger del sistema.

   (b) Dividiendo el intervalo de tiempo $[t_i, t_f]$ en segmentos infinitesimales Δt y tomando el límite $\Delta t \to 0$, demuestre que el propagador admite una representación como integral funcional $\langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle = \int \mathcal{D}x e^{\frac{i}{\hbar}\int_{t_i}^{t_f} dt\, L(t)}$, en donde $L(t)$ es el Lagrangiano clásico del sistema.

2. **** Integral funcional para un partícula libre**

   Considere una partícula libre con Hamiltoniano $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m}$.

   (a) Calcule el propagador $K(x_f, t_f; x_i, t_i)$ utilizando el formalismo de operadores.

   (b) Muestre que la integral funcional para el propagador es $K(x_f, t_f; x_i, t_i) = c(t_f - t_i) \exp\left[\frac{i}{\hbar}\frac{m}{2}\frac{(x_f - x_i)^2}{t_f - t_i}\right]$, en donde $c(t_f - t_i)$ es una normalización que depende sólo de la diferencia de tiempos inicial y final. Comparando con el resultado del inciso anterior, obtenga una expresión para $c(t)$.

3. **Integral funcional para el oscilador armónico**

   Para el sistema con Hamiltoniano $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2$, muestre que el propagador viene dado por

$$K(x_f, t_f; x_i, t_i) e^{iS_c/\hbar} \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi i\hbar \sin[\omega(t_f - t_i)]}}, \tag{1}$$

   en donde S_c es la acción clásica del sistema.

4. **** Integral funcional para la función de partición de un sistema cuántico**

   Muestre que la función de partición de un sistema con Hamiltoniano $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x})$ puede escribirse como una integral funcional en tiempo imaginario $t \to -i\tau$ (rotación de Wick) como

$$Z = \int \mathcal{D}x(\tau) \exp\left[-\frac{1}{\hbar}\oint_0^{\hbar\beta} d\tau \left(\frac{m}{2}\left(\frac{\partial x}{\partial \tau}\right)^2 + V(x)\right)\right], \tag{2}$$

   en donde $\oint$ denota que la integral es sobre todas las trayectorias que empiezan y terminan en el mismo punto x. La cantidad $S_E = \int d\tau \left(\frac{m}{2}\left(\frac{\partial x}{\partial \tau}\right)^2 + V(x)\right)$ es la acción en espacio Euclídeo del sistema.

5. **** Integrales gaussianas**

   Sea A una matriz real, definida positiva (con autovalores positivos) y simétrica, de $N \times N$ y $\vec{v}$ y $\vec{j}$ vectores de N componentes.

   (a) Muestre que

$$Z = \int d\vec{v} \exp\left[-\frac{1}{2}\vec{v}^T A \vec{v}\right] = (2\pi)^{N/2}(\det A)^{-1/2}. \tag{3}$$

(b) Muestre que

$$Z[J] = \int d\vec{v} \exp\left[-\frac{1}{2}\vec{v}^T A\vec{v} + \vec{j}^T\vec{v}\right] = (2\pi)^{N/2}(\det A)^{-1/2}\exp\left[\frac{1}{2}\vec{j}A^{-1}\vec{j}\right]. \tag{4}$$

(c) Muestre que la función de correlación viene dada por

$$\begin{aligned} \langle v_m v_n\rangle &= \frac{\int d\vec{v} v_m v_n \exp\left[-\frac{1}{2}\vec{v}^T A\vec{v}\right]}{\int d\vec{v}\exp\left[-\frac{1}{2}\vec{v}^T A\vec{v}\right]} &(5)\\ &= \frac{1}{Z[J]}\frac{\partial^2 Z[J]}{\partial j_m \partial j_n}|_{\vec{j}=0} &(6)\\ &= (A^{-1})_{mn}. &(7)\end{aligned}$$

(d) Escriba los análogos funcionales de las integrales anteriores.

6. **** Integral funcional en teoría cuántica de campos**

Sea un campo escalar (bosón con spin 0) con densidad lagrangiana $\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi)$.

(a) Mostrar que el propagador/función de partición puede escribirse como una integral funcional,

$$Z = \int \mathcal{D}\phi\mathcal{D}\Pi\ \exp\left[\frac{i}{\hbar}\int_{t_i}^{t_f}\int_{\mathbb{R}^3} d^4x\left(\Pi(x)\dot{\phi}(x) - H(\Pi,\phi)\right)\right], \tag{8}$$

en donde $\Pi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}}$, es el momento canónicamente conjugado al campo $\phi(x)$.

(b) Mostrar que si el Hamiltoniano del sistema es cuadrático en el momento $H = \frac{1}{2}\Pi^2 + \frac{1}{2}(\partial_i\phi)^2 + V[\phi]$, entonces la integral funcional puede escribirse como

$$Z = \int \mathcal{D}\phi\ \exp\left[\frac{i}{\hbar}\int_{t_i}^{t_f}\int_{\mathbb{R}^3} d^4x\mathcal{L}\right]. \tag{9}$$

7. **** Propagador del bosón libre**

Sea un campo escalar ϕ con acción euclídea dada por

$$S = \frac{1}{2}\int\ d^2x\left(\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + m^2\phi^2\right), \tag{10}$$

calcule el propagador $K(\vec{x},\vec{y}) = \langle\phi(\vec{x})\phi(\vec{y})\rangle$ en el caso $m = 0$ y $m \neq 0$.