Mecánica Estadística II - Curso 2019
Práctica 6: Grupo de Renormalización
Parte I

1. **** Grupo de Renormalización: Modelo de Ising unidimensional**

   Considere el modelo de Ising a primeros vecinos en una cadena unidimensional, donde el acoplamiento entre espines σ está dado por la constante de interacción J. Para resolver este modelo utilizando el grupo de renormalización, considere primero un agrupamiento de espines en bloques de $b = 3$. Tome como transformación del grupo de renormalización $T(\sigma', \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \delta_{\sigma'\sigma_2}$. Es decir, para definir un nuevo espín σ' tome el espín del medio del bloque.

   (a) Obtenga la ecuación del grupo de renormalización, relacionando el Hamiltoniano original con el nuevo Hamiltoniano equivalente para los espines σ'.

   (b) Analizando la ecuación anterior, indique claramente cuáles son los puntos fijos y cuál es su interpretación física. Dibuje el flujo del grupo de renormalización.

   (c) A partir de lo anterior, muestre que este modelo no presenta una transición de fase.

2. **** Grupo de Renormalización: Modelo de Ising unidimensional bajo un campo magnético**

   Tome el modelo de Ising del problema anterior, considerando ahora la acción de un campo magnético externo h a través de un acoplamiento de Zeeman, es decir con un término adicional en el Hamiltoniano reducido $-h\sum_i \sigma_i$.

   Para estudiar este problema utilizando el grupo de renormalización, considere ahora bloques con $b = 2$, tomando nuevamente para la transformación por ejemplo el primer espín del bloque. Encuentre las ecuaciones del grupo de renormalización, tomando como variables $x = e^{-2K}$, $y = e^{h}$. Analice los puntos fijos de este sistema. Muestre que para $h = 0$ recupera los resultados del ejercicio anterior

3. **** Grupo de renormalización en el espacio de momentos: modelo Gaussiano**

   Es usual utilizar el grupo de renormalización en el espacio de momentos, tomando variables continuas. Para ello suele trabajarse con el Hamiltoniano de Landau-Ginzburg-Wilson:

   $$\mathcal{H}(h, m(r)) = \int_V \mathrm{d}^2\vec{r} \left[\frac{1}{2}g|\nabla m(r)|^2 - m(r)h + \frac{1}{2}rm^2(r) + um^4(r)\right]$$

   donde $m(r)$ es el parámetro de orden.

   En el modelo Gaussiano en el espacio de momentos $\vec{k}$, nos interesaremos en la estabilidad de la solución para $m = 0$, y por lo tanto tomaremos $u = 0$, lo cual desacopla los modos con diferentes momentos. El Hamiltoniano resultante en el espacio de momentos es:

   $$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\sum_{|\vec{k}|<\Lambda}(r + gk^2)|m(q)|^2 - hm(0)$$

   donde Λ implica un corte en el espacio de momentos (en la frontera de la zona de Brillouin). La función de partición correspondiente es la integral funcional sobre todas las funciones $m(r)$.

(a) Calcule la función de correlación del modelo gaussiano en el espacio real $G_0(\vec{x}-\vec{y}) = \langle\varphi(\vec{x})\varphi(\vec{y})\rangle$.

(b) Para estudiar este modelo con el grupo de renormalización, se toma un nuevo corte en el espacio de momento a Λ/b, y luego se reescalean las variables. Es decir, es necesario realizar tres pasos: (1) integrar todos los modos k que se encuentran entre Λ/b y Λ ($b > 1$) (2) reescalear la variable $\vec{k}$ como $\vec{k}' = b\vec{k}$ (3) renormalizar el parámetro de orden. Siguiendo los pasos mencionados, encuentre las ecuaciones de recurrencia para los parámetros del problema r y h. Analice los diferentes puntos fijos e interprete físicamente.