Mecánica Estadística II - Curso 2019
Práctica 2: Excitaciones del Helio II - Superfluidez

1. **Contribución de los fonones al calor específico**

   Las excitaciones de más baja energía del He^4 son fonones. Por lo tanto, el calor específico para temperaturas lo suficientemente bajas está dominado por esta contribución, la cual puede calcularse siguiendo los siguientes pasos:

   a) Para un gas de fonones sin interacción el espectro viene dado por $E\{n_i\} = \Phi_0 + \sum_i \hbar\omega_i \left(n_i + \frac{1}{2}\right)$, en donde ω_i son las frecuencias de los modos normales, n_i son los números de ocupación de cada modo y Φ_0 es la llamada energía de unión (*binding energy*). Muestre que el calor específico de este sistema puede escribirse como

   $$C_V(T) = k \sum_i \frac{(\hbar\omega_i/k\,T)^2 \; e^{\hbar\omega_i/kt}}{\left(e^{\hbar\omega_i/kt} - 1\right)^2}. \tag{1}$$

   b) Explique por qué para calcular el calor específico consideraremos sólo a los N modos normales longitudinales de vibración. Muestre que en tal caso la frecuencia de Debye ω_D viene dada por $\omega_D = \left(\frac{6\pi^2 N}{V}\right)^{1/3} c$, en donde c es la velocidad del sonido en el líquido.

   c) Utilizando los resultados de los incisos anteriores, muestre que, a bajas temperaturas, el calor específico por unidad de masa del líquido viene dado por

   $$c_V = \frac{2\pi^2 k^4}{15\rho\hbar^3 c^3}\, T^3, \tag{2}$$

   en donde ρ es la densidad de masa del líquido. Defina cuantitativamente el rango de validez de esta aproximación, i.e., defina a qué nos referimos con "bajas temperaturas".

   d) Obtenga el valor numérico de c_V para el He^4 utilizando $\rho = 0{,}1455\, g/cm^3$ y $c = 238\, m/s$ y compárelo con el medido experimentalmente $c_V = (0{,}0204 \pm 0{,}0004)\, T^3\, Jg^{-1}K^{-1}$. El resultado experimental es válido para $0 < T < 0{,}6\, K$, ¿es consistente este intervalo con lo que hemos definido como bajas temperaturas?

2. **Modelo de excitaciones elementales: fonones y rotones. Contribución de los rotones a las variables termodinámicas.**

   Landau propuso un modelo empírico para explicar el comportamiento del líquido Helio II, donde las excitaciones corresponden a un fluido "normal" flotando en un fondo, el superfluido; de tal manera que a $T = 0$ todo el sistema está en la fase superfluida. En este modelo, las excitaciones de más baja energía corresponden a fonones, seguidas por las de "rotones". Se supone que las interacciones entre las excitaciones son despreciables a bajas temperaturas. Para los rotones, la relación de dispersión $\varepsilon(p) = \Delta + \frac{(p-p_0)^2}{2\mu}$, donde $\Delta/k_B = 8{,}65(4) K$, $p_0/\hbar = 1{,}92(0{,}01) \mathring{A}^{-1}$, $\mu = 0{,}16(1) m_{He}$.

   a) Identifique la hipótesis más fuerte en el modelo de Landau, la cual simplifica enormemente el problema.

   b) Discuta el rango de temperaturas donde las excitaciones de fonones y/o las de rotones son relevantes.

c) Escriba una expresión para el gran potencial para el sistema de rotones. ¿Cuánto vale el potencial químico y porqué? Muestre explícitamente que para el rango de temperaturas de interés $\exp(\Delta/k_B T) >> 1$.

d) Calcule la presión para este sistema. Indique y justifique claramente las aproximaciones realizadas.

e) Obtenga la energía libre de Helmoltz, la entropía, la energía media y el calor específico para este sistema.

3. **Inercia del gas de excitaciones**

La masa efectiva de un gas en "movimiento conjunto" puede definirse como la constante de proporcionalidad entre la velocidad $\vec{v}$ del conjunto y el momento $\vec{P}$ del gas.

a) Para un sistema donde el número de partículas N no está definido, pero el momento $\vec{P}$ está fijo, escriba el número medio de ocupación de un nivel $\varepsilon(p)$, desde el sistema de laboratorio.

b) A partir del punto anterior, y teniendo en cuenta la definición de masa efectiva, encuentre una expresión general para la "densidad efectiva" del sistema.

c) Calcule la densidad de masa para los fonones.

d) Repita el cálculo anterior para los rotones. Compare con la densidad de fonones y muestre para qué rangos de temperatura los fonones y/o los rotones aportan a la masa inercial del fluido.

e) La temperatura a la que ocurre la transición de fase lambda en el helio puede pensarse como la temperatura donde la densidad de la fase superfluida es cero. Es decir, donde la contribución a la densidad proviene completamente de la fase normal, que en este modelo está representada por las excitaciones. Comparando la densidad de rotones con la del Helio, obtenga un valor de la temperatura crítica y compárelo con el experimental para T_λ.

4. **Criterio de Landau para la superfluidez**

Considere el movimiento de un fluido a $T = 0$, situación para la cual todas las partículas están en el estado fundamental, es decir, no hay excitaciones en el sistema. Suponga que el fluido se mueve con velocidad $\vec{v}$ dentro de un capilar.

a) Muestre que, en el sistema de referencia en el cual el capilar está en reposo, la diferencia de energía generada por la aparición de una excitación con energía $\varepsilon(p)$ y momento $\vec{p}$ viene dada por $\Delta E = \varepsilon(p) + \vec{p} \cdot \vec{v}$.

b) Muestre que la condición para que no se produzcan excitaciones en el fluido es $v < v_c = \text{mín}_p \frac{\varepsilon(p)}{p}$ y que $\vec{p} \cdot \vec{v} < 0$. Para $v < v_c$ el flujo es superfluido.

c) Encuentre la velocidad crítica de superfluidez v_c *(i)* para un gas ideal, *(ii)* para un sistema cuyas únicas excitaciones son fonones con velocidad de propagación c y *(iii)* para el Helio II de acuerdo al modelo de Landau (fonones y rotones). En Helio II el valor observado de la velociad crítica es del orden de $1\,cm/s$ a $100\,cm/s$ y esta velocidad depende fuertemente de la geometría del flujo. Compare este valor con los valores obtenidos a partir del modelo de Landau. ¿Qué sugiere la comparación?

d) Considere ahora al fluido a una temperatura finita $T \neq 0$. En tal caso existen excitaciones térmicas en el sistema. Muestre que el número medio de ocupación del estado $\varepsilon(p)$, observado en un sistema de referencia K con respecto al cual el gas se encuentra en movimiento con velocidad $\vec{v}$, es $n(\varepsilon(p) - \vec{v} \cdot \vec{p})$, en donde $n(\varepsilon)$ es la ocupación en reposo. Encuentre la condición para que todos los números de ocupación sean positivos. Compare esta condición con el criterio de superfluidez obtenido en los incisos anteriores. Relaciones este resultado con la teoría de los dos fluidos de Landau estudiada en los ejercicios anteriores.

e) ¿Cuál es la hipótesis más fuerte en esta teoría de Landau sobre la superfluidez?