Mecánica Estadística II - Curso 2019
Práctica 1: Condensación de Bose –Einstein en gases de bosones no interactuantes

1. **Repaso de gas ideal de bosones.**

   a) Mostrar que la existencia de un condensado depende de la convergencia o no de la integral $\int_0 d^D p/\varepsilon(p)$, donde D es la dimensión y $\varepsilon(p)$ la relación de dispersión del sistema. ¿Qué sucede para $D = 2$?.

   b) *Ausencia de fragmentación en el Gas de Bose ideal:* muestre que el primer estado excitado tiene una población subextensiva. Para ello evalúe el gap de energía como función del tamaño, y luego su población debajo de la transición en el límite que corresponde.

   c) Obtenga la presión, el número de partículas, la energía, la energía libre de Helmoltz, la entropía y el calor específico para un gas de bosones en tres dimensiones, para $T < T_c$ y $T > T_c$.

   d) ¿Cuál es la ecuación que determina la región de transición?. Para $T < T_c$ se puede pensar al sistema como una mezcla de dos fases. ¿Cuáles? Determinar las fracciones de ambas fases como función de T/T_c.

   e) ¿Cómo se anula C_v cuando $T \to 0$?.

   f) Determinar el comportamiento del calor específico y de la fracción condensada cerca de la transición.

2. **Gas de Bose con un grado de libertad interno.**

   Considere un gas ideal de Bose–Einstein en tres dimensiones, compuesto de moléculas independientes de masa m. Como ocurre en los sistemas reales, estas tienen grados de libertad internos. Por simplicidad, consideraremos que los bosones en el estado fundamental tienen energía $\epsilon_0 = p^2/2m$ y en el estado excitado $\epsilon_1 = p^2/2m + \Delta$. Calcule la temperatura de condensación para $\Delta \gg kT_c^0$ y para $\Delta \ll kT_c^0$, donde T_c^0 es la temperatura de condensación del gas sin considerar el grado de libertad interno. La existencia de un grado interno de libertad, ¿aumenta o disminuye la temperatura de condensación? *Ayuda: en un apéndice del Pathria puede encontrar formas asintóticas para* $g_{\frac{3}{2}}(z)$ *que serán de utilidad.*

3. **La condensación de Bose en un gas ideal como una transición de fase de primer orden.**

   La condensación de Bose suele ser entendida como una transición de fase. La misma es muy especial, dado que no hay interacciones entre partículas. Vista desde las ecuaciones de estado, la transición no es muy distinta de la que sucede durante la condensación de un gas (g, en este caso el gas de Bose) en un líquido (l, el condensado conformado por partículas de impulso nulo).

   a) Muestre que, para temperaturas $T < T_c$ (o volúmenes específicos $v = V/N < v_c$) la presión depende solamente de la temperatura.

   b) Dibuje la curva crítica P vs. v_c, y una isoterma P vs. v. Compare a esta última con las isotermas que se obtienen para una transición líquido-gas en la región de coexistencia.

   c) Pese a que el volumen por partícula v puede variar continuamente a lo largo de una isoterma en una transición de fase primer orden, lo que sucede en realidad es que $v = x_l\, v_l + (1 - x_l)v_g$, siendo las $x_i = N_i/N$ las fracciones, y los v_i los volúmenes específicos (distintos) de cada fase. ¿Cuánto valdrían en el caso de la transición de Bose v_g (el volumen específico del gas de Bose usual) y v_l (el correspondiente a las partículas en el condensado)? Vincular esto último con lo encontrado en el punto b) Evaluar el cambio discontínuo que sufre el volumen específico, $\Delta v = v_l - v_g$. Identificar para este caso x_l y x_g.

d) Utilizando la ecuación de Clausius–Clapeyron sobre la curva de coexistencia $P_c(T)$ de un gas ideal de Bose–Einstein y conociendo Δv del punto anterior, encuentre la discontinuidad en la entropía ΔS al cruzar la línea de transición $P_c(T)$.

4. **Condensación de Bose–Einstein en gases de átomos ultrafríos**

   La condensación de Bose–Einstein fue realizada en un experimento controlado por primera vez en 1995, enfriando átomos de elementos alcalinos (como el rubidio y el sodio) utilizando novedosos métodos de enfriamiento mediante trampas magnéticas y ópticas. Por tal motivo, tales condensados no se forman en el espacio uniforme sino que lo hacen en presencia de campos externos. Para estudiar el efecto de tales campos externos sobre el fenómeno de condensación, considere un gas ideal de Bose en $D = 3$ en presencia de un potencial armónico de la forma $V(x, y, z) = \frac{1}{2}m(\omega_1^2\,x^2 + \omega_2^2\,y^2 + \omega_3^2\,z^2)$. Calcule la temperatura crítica en función del número de átomos y el número de átomos en el condensado en función de la temperatura. Calcule la temperatura crítica para $N = 2 \times 10^4$ y una frecuencia de la trampa magnética $f = 100\,Hz$ y compárela con el valor medido experimentalmente $T_c = 170\,nK$. *Hint:* primero encuentre la densidad de estados en función de la energía $a(\epsilon)$ en presencia del potencial externo.

5. **Condensación en $D = 2$ en presencia de un campo externo**

   Considere un gas ideal de bosones en $D = 2$ con relación de dispersión $\epsilon(\vec{p}) = \frac{\vec{p}^2}{2m}$. Ya hemos visto que en el caso uniforme (sin campo externo aplicado) no existe condensación de Bose–Einstein en este caso. Considere ahora que se aplica un campo externo unidimensional de la forma $U(x, y) = u_0\,\frac{x^2}{b^2} - u_0$, en donde u_0 es la profundidad del pozo de potencial y b determina la escala de longitud del mismo. Muestre que en este caso sí existe condensación de Bose–Einstein. Calcule la temperatura crítica y la fracción condensada en función de la temperatura. La aplicación de campos externos utilizando trampas magnéticas o redes ópticas es de hecho la forma en la que se obtienen condensados en bajas dimensiones ($D = 1, 2$) en los experimentos con átomos fríos.