Mecánica Estadística II - Curso 2017
Práctica 1: Modelo de dos fluidos

1 Preguntas Previas.

Recuerde intentar responderlas primero por sus medios. En una visión posterior de la materia –por ejemplo, al preparar el final– puede utilizar estas preguntas para tener una idea de algunos de los conceptos que debe saber.

a Enumere las hipótesis que hacen al modelo de dos fluidos.

b Utilizando las anteriores, explique cualitativamente:

[b1] El efecto temomecánico y el efecto fuente (plantee la situación, y solo luego de eso intente explicarla).

[b2] ¿Por qué la viscosidad parece ser nula en algunos experimentos, y finita en otros?

[b3] ¿Por qué es tan alta la conductividad térmica? ¿Qué es el segundo sonido?

[b4] Cómo trepa el He las paredes del recipiente que lo contiene?

c Para interacciones entre bosones no despreciables: i) pueden todas las partículas ocupar un mismo estado de impulso? ii) puede el condensado comprender (a T=0) a todas las partículas?

ch Si las ondas planas no son más autoestados del sistema, explique por qué es importante que un número macroscópico de partículas con el mismo valor de impulso.

d Explique por qué un concepto clásico como la *velocidad* del superfluido vuelve a tener sentido cuando nuestro líquido cuántico forma un condensado.

e Explique por qué el rotor de la velocidad superfluida es siempre nulo, y cómo puede ser que pese a eso pueda existir una circulación finita. Muestre que las líneas de vorticidad deben cerrarse sobre sí mismas (o terminar en los bordes del recipiente que contiene al fluido).

f Dado que a bajas temperaturas solo la parte normal del fluido sufrirá arrastre, explique cómo haría en un experimento para que el superfluido pueda tener una circulación no nula.

g Supongamos que la fracción superfluida del líquido se encuentra en rotación en un recipiente toroidal quieto. Teniendo en cuenta la tendencia de las partículas a condensar en un mismo estado cuántico, explique qué espera que suceda si bajamos aún más la temperatura. ¿Cómo reconcilia esto con la conservación del momento angular? ¿Qué sucedería si sube la temperatura por encima de T_λ y luego vuelve bajarla al valor original?

h A partir de la energía libre de Helmholtz, muestre que el estado de equilibrio a temperatura cero debe ser el que minimiza la energía. En el item pasado encontró que dos estados de rotación distintos podían establecerce a una misma temperatura $T < T_\lambda$. Cuál de estos será el de equilibrio?

i De una idea de cómo es el experimento diseñado por Vinen para medir la circulación en HeI.

j Para pensar. Intente explicar por qué los superfluidos son conocidos por su excelente conductividad térmica, mientras que los superconductores (superfluidos de los electrones que viven en la red cristalina de algunos metales) son famosos (y muchas veces utilizados) por tener una *mala* conductividad térmica (para un material que conduce la electricidad). A modo de guía, reflexione sobre las siguientes cuestiones: es buena la conductividad térmica del He a través de una superpérdida?

2 Problemas.

El comportamiento hidrodinámico del Helio II puede ser explicado por el modelo de dos fluidos de Tisza, que postula la coexistencia de dos componentes para $T < T_c$

* Una componente normal de densidad ρ_n moviéndose a velocidad v_n con densidad de entropía finita s_n.

* Una componente superfluída de densidad ρ_s, que fluye sin viscosidad, sin vorticidad y posee entropía nula $s_s = 0$.

Las ecuaciones hidrodinámicas de las que se desprenden los resultados más relevantes están dadas por

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \mathbf{J}, \quad \text{ecuación de continuidad} \tag{1}$$

$$\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} + f(v) = -\nabla p, \quad \text{ecuación de Euler} \tag{2}$$

donde ρ es la densidad total, $\mathbf{J}$ es la densidad de corriente de masa, v la velocidad del fluido y p es la presión. Si las velocidades de los dos fluidos no son muy grandes se puede aproximar $f(v) \approx 0$.

1. **Modelo de Tisza**

   (a) Obtenga las ecuaciones de movimiento para los dos componentes, normal y superfluido, en terminos de la presión, la entropía, la temperatura, y la viscosidad.

2. **Efecto termomecánico.**

   (a) Considerando despreciable la viscosidad del fluido normal, utilice el resultado obtenido en el ejercicio anterior para determinar el cambio en la temperatura ΔT como función de la variación de presión ΔP. Discuta las implicancias de este resultado (ver figura 1(a).

   (b) Compare el resultado obtenido con el gas de bosones calculando la pendiente $S(T)$ en el régimen condensado.

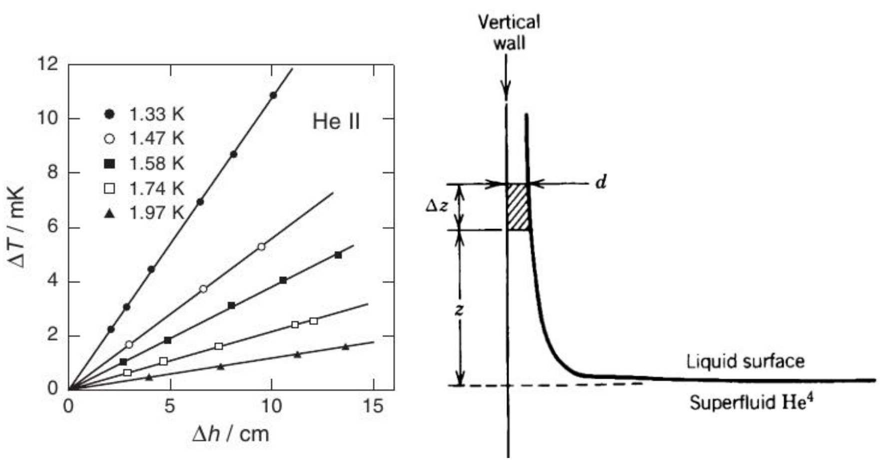

Figure 1: (a) Izquierda - Problema 2 (b) Derecha - Problema 6

3. **Propagación de sonido.** Empleando las ecuaciones (1) y (2), y considerando como variables independientes la densidad ρ y la entropía S encuentre las ecuaciones de onda para ρ y S.

4. **Vórtices** Consideremos una función de onda de la forma $\psi = |\psi| e^{i\phi(x)}$ en donde la fase $\phi(x)$, veremos, describe el comportamiento del superfluido.

   (a) Identifique que simetría posee dicha función de onda.

   (b) Determine la velocidad asociada al sistema en términos de la fase $\phi(x)$; para ello desprecie las variaciones en la densidad del fluido .

(c) Suponga que el fluido fluye en un circulo. Calcule la circulación de la velocidad y muestre que ésta está cuantizada.

(d) Un átomo de He está circulando alrededor de una linea de vórtice. Muestre que su momento angular es múltiplo de $\hbar$

(e) Calcule el número de vórtices con un solo cuanto de circulación en un recipiente con un diámetro $d = 2cm$ que rota con una velocidad angular de $\omega = 1/s$.

(f) Estime la densidad de vórtices en un recipiente debida a la rotación de la tierra.

5. **Vórtices semiclásicos. Relación de dispersión**.

(a) Mostrar que las ecuaciones que satisface el campo de velocidades semiclásico para un superfluido incompresible son idénticas a las del campo magnetostático, con la circulación ocupando el lugar de la corriente eléctrica. Encontrar el perfil de velocidades de un vórtice cilíndrico, con un cuanto de circulación $K = h/m$.

(b) Mostrar que la energía cinética por unidad de longitud ε/L de un vórtice con núcleo de radio a en el centro de un recipiente de tamaño b es $\frac{mn_0K^2}{4\pi}\ln(b/a)$

(c) *Par vórtice-antivórtice* Pensaremos ahora en dos vórtices lineales con circulación opuesta separados por una distancia $2r$, en el límite en el que $r >> a$. Utilizando el perfil de velocidades asociado a estas líneas de un cuanto de circulación, mostrar que el fluido como un todo (y por lo tanto el par de vórtices) se desplaza perpendicularmente a las líneas con velocidad $v = h/(2mr)$.

Aunque generalmente imaginamos vórtices rectilíneos, los vórtices que se cierran sobre sí mismos son un defecto topológico esencial en los superfluidos, y juegan un rol fundamental en la ruptura del orden. Estudiaremos ahora semiclásicamente un vórtice circular semiclásico.

(d) Interpretaremos ahora que estas líneas opuestas se corresponden a elementos opuestos de un gran vórtice circular, de diámetro $2r$. Vemos entonces que, como anillos de humo, estos toroides se desplazarán perpendicularmente a su plano aproximadamente con la velocidad estimada en el item anterior. Estime la energía cinética asociada a un vórtice circular reemplazando en la expresión anterior de la energía $L = 2\pi r, K = h/m, b \approx r$.

Comprobar que cuanto más energía cinética tiene un vórtice, más lentamente se desplaza, e interpretar el resultado (qué sucede con el tama no, la masa y la velocidad del vórtice al aumentar la energía?).

(e) En un experimento notable, Reif y Rayfield aceleraron iones de He4 producidos en el superfluido, y midieron la velocidad de esos iones a 0.28 K. De acuerdo a lo esperado, encontraron que los iones eran capaces de moverse distancias de hasta varios cm en el seno del líquido sin ser dispersados. En contra de lo esperado, la velocidad de los mismos disminuía conforme su energía aumentaba. Interpretar estos datos teniendo en cuenta la expresión deducida en el item anterior. (Como pista extra diremos que en los anillos de humo las partículas se mueven junto con el vórtice; al decir de Helmholtz, 'las líneas del vórtice se mueven con el vórtice').

(f) Estimar el impulso del vórtice circular, mostrando que $p \approx 2\pi^2 hN/Vr^2$, y entonces $\varepsilon(p)\alpha p^{1/2}$. Notar que la relación de dispersión comienza en $p = 0$ con pendiente infinita. Veremos luego que esto tendrá consecuencias sobre la velocidad a la que se destruye la superfluidez.

6. La cualidad más visible del He II es su capacidad de trepar por las paredes del recipiente que lo contiene (ver figura 1(a)). La razón es que éste recubre las paredes con una fina película, que luego actúa como el tubo de un sifón. A una dada altura z en encima de la superficie del líquido (en equilibrio con su vapor), la película adherida a la pared vertical tiene un espesor proporcional a $z^{-1/2}$. Derivar este resultado con la siguiente ayuda.

(a) Suponga una temperatura tal que la fracción de superfluído es f. Considere un elemento del fluido adherido a una altura z, de espesor d y altura Δz, y ancho igual a 1 en la otra dirección. Considerando al elemento de volumen como un gas de bosones libres, escribir su energía, con las contribuciones de energía potencial, gravitatoria y cinética.

(b) Minimizar la energía respecto de d

(c) El argumento anterior es válido tanto dentro de la fase de HeI como HeII. Explique por qué solamente en el último caso se observa el fenómento en que el líquido trepa por las paredes.