Mecánica Cuántica II

Prof. Aníbal Iucci
JTP Alejo Costa

Práctica 2: Dispersión

Año 2024

1. **Método de ondas parciales** Considere una partícula sujeta a un potencial dispersor esféricamente simétrico de corto alcance, es decir $\lim_{r\to\infty} r^2 V(r) = 0$. Obtenga la amplitud de dispersión para $r \to \infty$ como

$$f(\theta) = \frac{1}{k}\sum_{l=0}(2l+1)e^{i\delta_l}\sin(\delta_l)P_l(\cos(\theta))$$

y a partir de esta la sección eficaz diferencial y la sección eficaz total.

   a) Calcule los defasajes δ_l y la sección eficaz total para el caso de un potencial de esfera dura

$$V(r) = \begin{cases} \infty & \text{para } r < R \\ 0 & \text{para } r > R \end{cases}$$

2. **Pozo esférico finito**

   a) Calcule el defasaje δ_0 y la sección eficaz parcial σ_0 para un potencial $V(r) = V_0 H(R-r)$, considere los casos atractivo y repulsivo. Calcule $\sigma_0(k)$ en el límite $kR \ll 1$.

   b) Calcule ahora el defasaje δ_1 y $\sigma_1(k)$, en el límite $kR \ll 1$ y $k_0 R \ll 1$ con $k_0 = \sqrt{2m|V_0|}/\hbar$. Verifique que $\sigma_1 \ll \sigma_0$.

3. La figura 1 muestra los defasajes δ_0 y δ_1 de la dispersión de un pión π^+ por un protón p. Considere que los siguientes defasajes cumplen $\delta_l \ll 1$ y pueden ser ignorados y note que la energía cinética T_π es la energía cinética relativista $T_\pi = \sqrt{p_\pi^2 + m_\pi^2} - m_\pi$.

   a) ¿El potencial de interacción entre el pión y el protón es principalmente atractivo o repulsivo?

   b) Haga un bosquejo de la sección eficaz total como función de la energía T_π

   c) Haga un bosquejo de la sección eficaz diferencial para las energías 20 MeV, 80 MeV y 150 MeV.

4. Una partícula de masa m y energía E se dispersa en el potencial central

$$V(r) = -\frac{\hbar^2}{2ma^2}\frac{1}{\cosh^2(r/a)},$$

donde a es una constante. Si la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} + c^2 y + \frac{2}{\cosh^2(x)}y = 0$$

tiene como soluciones $y = e^{icx}(\tanh x - ic)$ y $y = e^{-icx}(\tanh x + ic)$, encuentre el cambio de fase y la contribución de la onda s a la sección eficaz total.

5. **Dispersión por un potencial delta** Consideremos una partícula de masa m que se ve dispersada por un potencial con simetría esférica de la forma

$$V(r) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\lambda}{R}\delta(r-R) \tag{1}$$

   a) Encuentre una expresión general para los defasajes δ_l. A partir de esta, obtenga σ_l para $kR \ll 1$. Demuestre que en el límite de $\lambda \to \infty$ el resultado para $\tan(\delta_l)$ es el que se obtiene para una esfera rígida. ¿Qué interpretación física puede darle a esto?

6. **Ecuación de Lippmann-Schwinger**

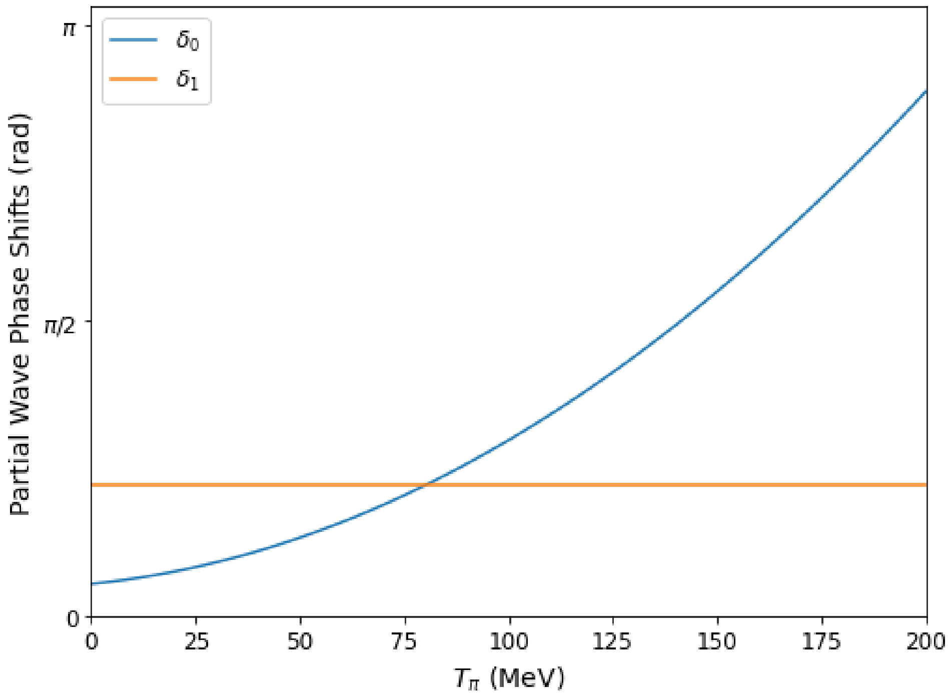

Figura 1: Posible gráfico de defasajes δ_0 y δ_1 para una dispersión elástica de un pión por un protón

a) Escriba la ecuación de Lippman-Schwinger para el caso unidimensional. Considere una onda incidente de la forma $\langle x|\phi\rangle = e^{ikx}/\sqrt{2\pi}$ y verifique que la función de Green es

$$G_\pm(x,x') = \frac{e^{\pm ik|x-x'|}}{2ik}$$

b) Considere el potencial $V(x) = -\frac{\gamma\hbar^2}{2m}\delta(x)$, $\gamma > 0$. Aplique la ecuación anterior para hallar los coeficientes de transmisión y reflexión T y R.

c) Encuentre los estados ligados del potencial anterior y verifique que los correspondientes valores de k (complejos) coinciden con los polos de T y R.

7. **Aproximación de Born**

a) Muestre que en la aproximación de Born la sección eficaz diferencial correspondiente a la dispersión de partículas de masa m e impulso k por un potencial de Yukawa $V(r) = \frac{\beta}{r}e^{-\gamma r}$ está dada por

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4m^2\beta^2/\hbar^4}{\left(4k^2\sin^2(\theta/2)+\gamma^2\right)^2}$$

A partir de este resultado obtenga la sección eficaz de Rutherford.

b) Encuentre la sección eficaz diferencial y total para los potenciales

1) $V(r) = V_0 H(R-r)$.
2) $V(r) = V_0 e^{-r^2/2R^2}$

Determine las condiciones de validez de las expresiones. Verifique que para $kR \ll 1$ la sección eficaz diferencial es isotrópica.

8. Se tiene un dipolo eléctrico que consiste en dos cargas eléctricas e y $-e$ separadas por una distancia mutua de $2a$. También se tiene una partícula de carga e y masa m con un vector de onda incidente k perpendicular a la dirección del dipolo.

a) Calcule la amplitud de dispersión en la aproximación de Born. Encuentre las direcciones en las cuales la sección eficaz diferencial es máxima.

b) Considere ahora que el dipolo esta formado por dos cargas arbitrarias q_1 y q_2 colocadas en las mismas posiciones que antes. Calcule nuevamente la amplitud de dispersión y las direcciones de dispersión máximas.

9. Considere la dispersión de una partícula por una distribución de centros dispersores. Cada dispersor se encuentra en un punto r_i y dispersa con un potencial dado $V_0(|\vec{r}-\vec{r_i}|)$. Escriba la amplitud de dispersión en la aproximación de Born. ¿Qué resultado obtiene si los centros dispersores se encuentran en los puntos de una red cristalina? Los puntos de la red $\boldsymbol{r}_{lmn}$ están definidos por $\boldsymbol{r}_{lmn} = l\hat{\boldsymbol{a}}_1 + m\hat{\boldsymbol{a}}_2 + n\hat{\boldsymbol{a}}_3$ siendo l, m, n enteros y $\hat{\boldsymbol{a}}_1, \hat{\boldsymbol{a}}_1, \hat{\boldsymbol{a}}_3$ vectores en $\mathbb{R}^3$.

10. **Potencial de Coulomb** A partir de la solución de la ecuación de Schrödinger, calcule la sección eficaz correspondiente a la dispersión por un potencial de Coulomb (dispersión de Rutherford) y verifique que la aproximación de Born utilizada en el ejercicio 6)*a*) conduce al resultado exacto.