4 Aproximación Semiclásica

Antes de pasar al estudio de dicha aproximación recordemos algunos conceptos antes desarrollados que van a motivar la idea de desarrollar en potencias de $\hbar$. En la subsección 3.1 vimos que la acción en un sistema clásico tiene una diferencial

$$dS = \sum_i p_i dq_i - \mathcal{H}dt,$$

y para una dimensión y una partícula será

$$dS = pdx - \mathcal{H}dt,$$

y para un sistema estacionario(donde $\mathcal{H}$ no depende explicitamente del tiempo) se conserva la energía

$$dS = \frac{\partial S}{\partial x}dx + \frac{\partial S}{\partial t}dt = \pm pdx - Edt \Rightarrow S = \pm \int p(x)dx - Et$$

donde $p(x)$ sería la cantidad de movimiento de la partícula en un dado valor x , y tendremos $\pm$ ya que la partícula pude ir hacia la derecha o la izquierda si fijamos a $p(x) > 0$. Si consideramos que $E = p^2/2m + U(x)$ podemos despejar $p(x) = \sqrt{2m(E - U(x))}$ y asi tendremos

$$S(x,t) = \pm \int \sqrt{2m(E - U(x))}dx - Et,$$

donde finalmente la función de onda cuasiclásica será

$$\boxed{\Psi(x,t) = A(x,t)e^{\frac{i}{\hbar}S(x,t)} = A(x)e^{\pm\frac{i}{\hbar}\int\sqrt{2m(E-U(x))}dx}e^{-\frac{i}{\hbar}Et}. \quad (73)}$$

4.1 Desarrollo de la función de onda en potencias de $\hbar$

Volvamos ahora a la mecánica cuántica y veamos que es la aproximación semiclásica. Ya hemos visto anteriormente que si en la ecuación de Scrödinger independiente del tiempo para una partícula

$$\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\mathbf{r}) + (E - U(\mathbf{r}))\psi(\mathbf{r}) = 0, \quad (74)$$

reemplazabamos la función de onda semiclásica $\psi = Ae^{i/\hbar S}$y tirando términos de orden $\hbar^2$ podiamos llegar a la ecuación de Hamilton-Jacobi. También sabemos que cuando la longitud de onda de de Brogli es pequeña frente a las dimensiones características del problema, como lo son la longitud de onda de la luz frente a la separación de rendijas en una red de difración, tenemos *un paso de óptica ondulatoria a geométrica.*

Vamos a trabajar en una dimensión por simplicidad . Si hago un cambio de variable en (74) $\psi(x) = e^{(i/\hbar)u(x)}$ tendremos la ecuación para $u(x)$

$$\begin{aligned}
\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{i}{\hbar}e^{(i/\hbar)u(x)}u'(x)\right]' &= -(E-U(x))e^{(i/\hbar)u(x)} \\
\frac{\hbar^2}{2m}\left[\left(\frac{i}{\hbar}\right)^2 u'(x)^2 + \frac{i}{\hbar}u''(x)\right]\cancel{e^{(i/\hbar)u(x)}} &= -(E-U(x))\cancel{e^{(i/\hbar)u(x)}} \\
\frac{(u'(x))^2}{2m} - \frac{i\hbar u''(x)}{2m} &= E - U(x), \qquad (75)
\end{aligned}$$

donde hemos factorizado $e^{(i/\hbar)u(x)}$ que nunca es cero, y reacomodado la ecuación. Si ahora queremos *hacer un desarrollo de $\psi(x)$ en potencias de $\hbar$* primeramente hagamos un desarrollo del exponente $u(x)$ (que tiene las dimensiones de $\hbar$) y luego de la exponencial. Consideremos

$$u(x) = u_0(x) + (\hbar/i)u_1(x) + (\hbar/i)^2 u_2(x) + ...$$

en potencias de $\hbar$. Si consideramos la primera aproximación tendremos $u(x) \approx u_0(x)$ y *tirando el términos que contienen a $\hbar$ y*a que estamos considerando la aproximación a orden $\hbar^0$ tendremos

$$\frac{(u_0'(x))^2}{2m} = E - U(x), \Rightarrow u_0(x) = \pm \int \sqrt{2m(E-U(x)}dx,$$

donde si consideramos que $E = p^2/2m + U(x)$ podemos despejar $p(x) = \sqrt{2m(E-U(x))} > 0$ que sería *la cantidad de movimiento de la partícula en un dado valor x* y por lo tanto

$$u_0(x) = \pm \int p(x)dx, \; \psi(x) = e^{\frac{i}{\hbar}u_0(x)}, \qquad (76)$$

que sería esperable ya que como hemos visto $S = -Et \pm \int p(x)dx$ pero el término temporal ha sido factorizado en la ec. de Schrödinger para obtener la independiente del tiempo asi que nos quedamos con el 2do.

Asi obtendremos a orden $\hbar^0$ en el desarrollo de $u(x)$, y también en $\psi(x)$ pues si expandimos la exponencial $e^{(i/\hbar)u} = 1 + (i/\hbar)u + \frac{1}{2}(i/\hbar)^2u^2 + ...$el termino de mayor orden es $\hbar^0$ ya que despues tenemos potencias negativas que no pueden despreciarse cuando $\hbar \to 0$ obteniendose

$$\boxed{\begin{aligned}
u_0(x) &= \pm \int p(x)dx = S + Et \equiv W(x), \\
&\Rightarrow \; \psi(x) = C_0 e^{-i/\hbar \int p(x)dx} + C_0' e^{i/\hbar \int p(x)dx} \Rightarrow \psi(x)e^{-\frac{i}{\hbar}Et} \sim Ce^{\frac{i}{\hbar}S(x,t)}. \qquad (77)
\end{aligned}}$$

.

Para ver cuando es válida esta aproximación, notemos que el tirar el término con u''en (75) será válido cuando sea mucho menor que el primero es decir $(u(x) \approx u_0(x))$

$$\left|\frac{\frac{i\hbar u''(x)}{\cancel{2m}}}{\frac{(u'(x))^2}{\cancel{2m}}}\right| = \left|\frac{d(\hbar/u'(x))}{dx}\right| = \left|\frac{d(2\pi\hbar/p(x))}{2\pi dx}\right| = \left|\frac{d\lambda(x)}{2\pi dx}\right| << 1, \tag{78}$$

que puede entenderse que $|d\lambda|/\lambda << (2\pi/\lambda)dx = d\phi$ o sea que el cambio porcentual en la longitud de onda (debido al potencial presente) debe ser mucho menor que el cambio de fase en la onda entre $x, x+dx$, lo que significa que la aproximación es válida siempre y cuando *el cambio en la longitud de onda $\Delta\lambda \ll 2\pi\lambda$ sea pequeño frente a distancias del mísmo orden que la longitud misma.*

Otra forma de ver la condición es usar

$$\frac{dp(x)}{dx} = \frac{d\sqrt{2m(E-U(x))}}{dx} = -\frac{m(dU/dx)}{p(x)} = \frac{mF(x)}{p(x)}, \; d(1/p)/dx = -(1/p^2)dp/dx,$$

y asi la eq.(78) se escribe

$$\left|\frac{d(\cancel{2\pi}\hbar/p(x))}{\cancel{2\pi}dx}\right| = \left|\frac{-(1/p^2)\hbar mF(x)/p}{1}\right| = \frac{m\hbar\,|F(x)|}{p(x)^3} << 1, \tag{79}$$

lo que nos dice que *la proximación cuasiclásica de este orden dejará de ser valida cuando el impulso es pequeño y $\lambda = 2\pi\hbar/p \to \infty$, o nulo como en los puntos retroceso donde $p(x) = \sqrt{2m(E-U(x))} = 0$ porque allí la Ec.(79) no podrá cumplirse.*

Si ahora vamos al orden siguiente y consideramos que $u(x) \approx u_0(x) + (\hbar/i)u_1(x)$ y remplazamos en (75) tendremos que los terminos a orden $\hbar$ satisfacen

$$u_0'u_1' + (1/2)u_0'' = 0 \Rightarrow u_1' = -(1/2)u_0''/u_0' = -p'/2p = d/dx(ln\; p(x)^{-1/2}) \Rightarrow u_1(x) = ln\; p(x)^{-1/2} \tag{80}$$

donde hemos usado que $u_0(x) = \pm\int p(x)dx \Rightarrow u_0' = \pm p,\; u_0'' = \pm p'$ y de esta manera a partir de (75) y (80) en $\psi(x) = e^{(i/\hbar)u(x)}$ obtendremos

$$\boxed{\begin{aligned}\psi(x) &\approx C_1 e^{(i/\hbar)\int p(x)dx + ln\; p(x)^{-1/2}} + C_1' e^{-(i/\hbar)\int p(x)dx + ln\; p(x)^{-1/2}}\\ \psi(x) &\approx \frac{C_1}{\sqrt{p(x)}}e^{(i/\hbar)\int p(x)dx} + \frac{C_1'}{\sqrt{p(x)}}e^{-(i/\hbar)\int p(x)dx}, O(\hbar)\end{aligned}} \tag{81}$$

donde notamos que nuevamente no hace falta expandir la exponencial pues la potencia más alta será $\hbar^0$y luego las negativas.

Vemos aqui que se cumple la aproximación cuasiclásica

$$\psi(x)e^{-\frac{i}{\hbar}Et} \sim \frac{C}{\sqrt{p(x)}}e^{(i/\hbar)S(x,t)} \equiv A(x)e^{(i/\hbar)S(x,t)}.$$

Normalmente con este orden alcanza para los cálculos, ya que si seguimos agregando término en el desarrollo $u(x) = u_0(x) + (\hbar/i)u_1(x) + (\hbar/i)^2 u_2(x) + ...$ y desarrollando la exponencia enpezarán a aparecer contribuciones de orden $\hbar$ en los coeficientes C_1, C_1' de las exponenciales en (81). Por ejemplo si hacemos $u(x) = u_0(x) + (\hbar/i)u_1(x) + (\hbar/i)^2 u_2(x)$ y reemplazamos en la ec.(75) el coeficiente de $\hbar^2$ igualado a cero daría

$$u_0' u_2' + (1/2)u_1'^2 (1/2)u_1''^2 = 0$$

de donde usando los $u_{0,}u_1$ antes hallados podría despejarse

$$u_2(x) = \frac{1}{4}mF(x)/p(x)^3 + \frac{1}{8}m^2 \int F^2(x)/p(x)^5 dx, \quad F(x) = -dU(x)/dx = (p(x)/m)(dp(x)/dx)$$

según la definición de p en $p(x) = \sqrt{2m(E-U(x))}$. Cuando ponemos esta corrección en u obtendremos para la exponencial

$$\psi(x) = Ce^{i/\hbar[u_0 + (\hbar/i)u_1 + (\hbar/i)^2 u_2]} = Ce^{(i/\hbar)u_0 + u_1 + (\hbar/i)u_2} \approx Ce^{(i/\hbar)u_0 + u_1}[1 - i\hbar u_2]$$

donde vemos que aparecen correcciones $\hbar^1$ en los coeficientes y por lo tanto en $\psi(x)$.

Notemos que aparece una factor $1/\sqrt{p(x)}$ en las funciones de onda y la probabilidad de que la partícula se encuentre entre $x, x+dx$ es $|\psi(x)|^2 dx \sim dx/p(x) \sim \frac{dt}{m}$ que *es proporcional tiempo que clásicamente estaría una partícula que viaja con impulso p, en una región de ancho dx*.

En las regiones donde la partícula clasicamente no puede acceder $E < U \Rightarrow p(x) = i\sqrt{2m(U(x)-E)}$

$$\boxed{\psi(x) \approx \frac{C_1}{\sqrt{\mathrm{p}(x)}}e^{(-1/\hbar)\int \mathrm{p}(x)dx} + \frac{C_1'}{\sqrt{\mathrm{p}(x)}}e^{(1/\hbar)\int \mathrm{p}(x)dx}, \mathrm{p}(x) = \sqrt{2m(U(x)-E)}, \qquad (82)}$$

que son exponenciales decrecientes si $C_1' = 0$.

4.2 Que pasa en los puntos de retorno?

Los puntos $x = x_0 | U(x_0) = E$ en mecánica clásica se llaman puntos de retorno porque allí la partícula se detiene y vuelve, y si $U(x) > E, \forall x > x_0$ (región II de la siguiente figura) esos puntos serían clasicamente inalcanzables. Si usamos la aproximación cuasiclásica (82) para describir la función de onda, hacemos $C_1' = 0$ para tener una exponencial decreciente y tendremos

$$\psi(x) = \frac{C_{II}}{2\sqrt{\mathrm{p}(x)}} e^{(-1/\hbar)\int \mathrm{p}(x)dx}, p(x) = \sqrt{2m(U(x)-E)}, x > x_0 \tag{83}$$

donde el 2 abajo es por conveniencia y puede ser absorbido por C_{II}.

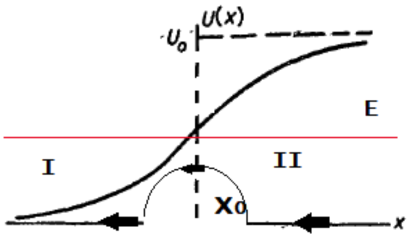


Figura 15: Conectando regiones I y II con aproximación cuasielástica

Ahora para la región donde $U(x) < E, x < x_0$ (región I de la figura) tendremos onda incidente y reflejada con lo que la función de onda será como en (81) notemoas que

$$\psi(x) \approx \frac{C_I}{\sqrt{p(x)}} e^{(i/\hbar)\int_{x_0}^{x} p(x')dx'} + \frac{C_I'}{\sqrt{p(x)}} e^{-(i/\hbar)\int_{x_0}^{x} p(x')dx'}, p(x) = \sqrt{2m(E-U(x))}, x < x_0 \tag{84}$$

hemos agregado constantes $e^{\mp\frac{i}{\hbar}P(x_0)}$ donde $P(x) = \int p(x)dx$ es la primitiva de $p(x)$, que se absorven en C_I, C_I' y usado que $\pm(P(x) - P(x_0)) = \pm\int_{x_0}^{x} p(x')dx'$.

Ahora, para poder relacionar los coeficientes en ambas regiones debemos conectar ambas soluciones en x_0 pasando desde II a I donde $p = 0$ (punto de retorno) y no es válida la aproximación cuasiclásica como vimos antes. *Deberíamos allí buscar soluciones exactas de la ecuación de Schrödinger para la forma de potencial específico.* Sin embargo, si consideramos $\psi(z)$ *función de variable compleja* y para pasar desde II a I elegimos la semicircunferencia mostrada en la figura alejada del punto $z = (x_0, 0)$, camino donde *asumimos* se cumpliría la aproximación cuasielástica para la extensión al campo complejo y podriamos usar ese camino para conectar las soluciones. Explicitamente

$$\psi(x) = \frac{C_{II}}{2\sqrt{p(x)}} e^{(-1/\hbar)\int_{x_0}^{x}\sqrt{2m(U(x)-E)}dx}, x > x_0 \tag{85}$$

debe transformarse en la solución (84).

Ahora como $e^{\pm iz} = e^{\pm i(x+iy)} = e^{\pm ix}e^{\mp y}$ cuando vamos transitando el plano complejo superiror con $y > 0$ *es la exponencial creciente en y la más importante*, la otra decae, y por lo tanto nos quedamos con la contribución de C_I' y con ésta debemos conectar. Ahora, volviendo a (85) notemos que cuando vamos de $x = x_0 + \epsilon = x_0 + \epsilon e^{i0}$ a $x = x_0 - \epsilon = x_0 + \epsilon e^{i\pi}$ tenemos un cambio de fase en π y además

$$p(x_0+\epsilon) = \sqrt{2m|U(x_0-\epsilon)-E|e^{i0}} \rightarrow \mathrm{p}(x_0-\epsilon) = \sqrt{2m|U(x_0-\epsilon)-E|e^{i\pi}} = \cdots e^{i\pi/2}$$

donde hemos usado $\sqrt{e^{i\pi}} = e^{i\pi/2}$, este cambio se compensa en el exponente porque tambien en la integral dx cambia de fase, pero no en el coeficiente que tiene $\frac{1}{\sqrt{p(x)e^{i\pi/2}}} = \frac{1}{\sqrt{p(x)}}e^{-i\pi/4}$

$$C_{II}/2\mathrm{p}^{1/2} \quad \to \quad \left(C_{II}/2p^{1/2}\right)e^{-i\pi/4} \equiv C_I'/2p^{1/2}$$

al conectar con la otra región.

De igual manera, si eligieramos en vez de la semicircunferencia en el plano complejo superior una en el plano inferior, ahora nos quedaríamos con C_I que tendría la exponencial decreciente y obtendriamos siguiendo un procedimiento similar

$$\left(C_{II}/2p^{1/2}\right)e^{i\pi/4} \quad \equiv \quad C_I/2p^{1/2}.$$

Así, la solución para $x < x_0$ (región I) quedaría teniendo en cuenta las relaciones anteriores entre C_I, C_I' y C_{II}

$$\psi(x) \approx \frac{C_{II}}{2\sqrt{p(x)}}e^{(i/\hbar)\int_{x_0}^{x} p(x)dx + i\pi/4} + \frac{C_{II}}{2\sqrt{p(x)}}e^{-(i/\hbar)\int_{x_0}^{x} p(x)dx - i\pi/4} = Z + Z^* = 2ReZ \tag{86}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{C_{II}}{\sqrt{p(x)}}cos((1/\hbar)\int_{x_0}^{x} p(x)dx + \pi/4) \\ &= \frac{C_{II}}{\sqrt{p(x)}}cos(-(1/\hbar)\int_{x}^{x_0} p(x)dx + \pi/4) \equiv \frac{C_{II}}{\sqrt{p(x)}}cos(\pi/2 - \alpha) \\ &= \frac{C_{II}}{\sqrt{p(x)}}sen((1/\hbar)\int_{x}^{x_0} p(x)dx + \pi/4), x < x_0 \end{aligned} \tag{87}$$

Ahora, si se cumpliera que $U(x) > E, \forall x < x_0$ (escalon de bajada) deberiamos hacer nuevamente en análisis pero obtendriamos

$$\psi(x) = \frac{C_{II}'}{2(2m(U(x)-E))^{1/4}}e^{-(1/\hbar)\int_{x}^{x_0}\sqrt{2m(U(x)-E)}dx}, x < x_0 \tag{88}$$

y conectar nuevamente en el camplo complejo, con lo se obtendría

$$\psi(x) = \frac{C_{II}'}{\sqrt{p(x)}}sen((1/\hbar)\int_{x_0}^{x} p(x)dx + \pi/4), x > x_0 \tag{89}$$

Por lo tanto y resumiendo nos quedaría, si tenemos *dos punto de retroceso a y b*

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{C_{II}'}{2\sqrt{\mathrm{p}(x)}}e^{-(1/\hbar)\int_x^a \mathrm{p}(x)dx} & , p(x) = \mathrm{p}(x) = \sqrt{2m(U(x)-E)}, x < a \\ \frac{C_{II}'}{\sqrt{p(x)}}sen((1/\hbar)\int_a^x \mathrm{p}(x)dx + \pi/4) & \\ , \frac{C_{II}}{\sqrt{p(x)}}sen((1/\hbar)\int_x^b \mathrm{p}(x)dx + \pi/4) & , p(x) = \sqrt{2m(-U(x)+E)}, a < x < b \\ \frac{C_{II}}{2\sqrt{\mathrm{p}(x)}}e^{(-1/\hbar)\int_b^x \mathrm{p}(x)dx}, x > b & p(x) = \mathrm{p}(x) = \sqrt{2m(U(x)-E)}, x > b \end{cases} \tag{90}$$

Si tenemos una barrera de potencial infinita en por ejemplo en $x = b$ tendremos $C_{II} = 0$.

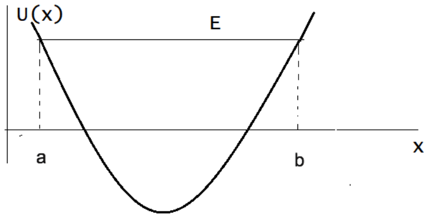


Figura 16: pozo de potencial región clásicamente accesible

4.3 Regla de cuantificación de Bohr-Sommerfeld

Hasta el momento hemos asumido un continuo para la energía E, pero los estados ligados como bien sabemos deben tener un conjunto discreto, veamos como es la cuantificación dentro de la aproximación cuasiclásica. Consideremos un potencial que tenga clasicamente un dominio accesible $[a, b]$ o sea que $U(x) > E$ fuera de él. Por lo tanto a, b son puntos de retroceso, por ejemplo el pozo de la figura.

Clasicamente una particula realizaría con una energía E un movimiento periódico con un período

$$T = 2\int_a^b dx/v(x) = 2m\int_a^b dx/p(x)$$

siendo v y p la velocidad e impulso .Por ejemplo si clásicamente la partícula describe un movimiento oscilatorio armónico

$$x(t) = Asen(\omega t + \alpha) \Rightarrow v(t) = A\omega cos(\omega t + \alpha) \Rightarrow v(x) = \pm\omega\sqrt{1 - x^2}$$

Ya sabemos que fuera del intervalo $[a, b]$ las soluciones son exponenciales decrecientes pero dentro ya vimos que haciendo la conexión ya sea en b o a podíamos hallar

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \frac{C}{\sqrt{p(x)}} sen\left[1/\hbar\int_a^x p(x)dx + \pi/4\right], \quad x > a, \\ \psi(x) &= \frac{C'}{\sqrt{p(x)}} sen\left[1/\hbar\int_x^b p(x)dx + \pi/4\right], \quad x < b, \end{aligned} \tag{91}$$

donde $p(x) = \sqrt{2m(U(x) - E)}$, ahora si ambas ecuaciones deben coincidir en un valor de x se debe cumplir

$$\begin{aligned} \frac{C}{\sqrt{p(x)}} sen\left[1/\hbar\int_a^x p(x)dx + \pi/4\right] &= \frac{C'}{\sqrt{p(x)}} sen\left[1/\hbar\int_x^b p(x)dx + \pi/4\right] \\ \frac{C}{\cancel{\sqrt{p(x)}}} sen\left[1/\hbar\int_a^x p(x)dx + \pi/4 + 1/\hbar\int_x^b p(x)dx - 1/\hbar\int_x^b p(x)dx\right] &= \frac{C'}{\cancel{\sqrt{p(x)}}} sen\left[1/\hbar\int_x^b p(x)dx + \pi/4\right] \\ Csen\left[1/\hbar\int_a^b p(x)dx + \pi/4 - 1/\hbar\int_x^b p(x)dx\right] &= C'sen\left[1/\hbar\int_x^b p(x)dx + \pi/4\right] \\ -Csen\left[1/\hbar\int_x^b p(x)dx \cancel{- \pi/4} + \pi/\cancelto{4}{2} - 1/\hbar\int_a^b p(x)dx - \pi/2\right] &= C'sen\left[1/\hbar\int_x^b p(x)dx + \pi/4\right] \end{aligned}$$

ahora si suponemos $C = (-1)^n C', n = 0, 1, 2, ...$deberá cumplirse para tener la igualdad, dado que $-sen(\alpha - (n+1)\pi) = (-1)^n sen(\alpha)$,

$$1/\hbar \int_a^b p(x)dx + \pi/2 \quad = \quad (n+1)\pi, n = 0, 1, 2, ... \tag{92}$$

que puede escribirse considerando el periódo completo de movimiento yendo de a hacia b y volviendo a a (sabemos que cuando vuelve tenemos $-p(x)$ y la integral $\int_a^b = -\int_b^a$)

$$\boxed{2\int_a^b p(x)dx \quad \equiv \quad \oint p(x)dx = 2\pi\hbar(n+1/2). \quad (93)}$$

Esta condición determina en el caso cuasiclásico los estados estacionarios de una partícula y corresponde a la regla de cuantificación de Bohr-Sommerfeld de la teoría cuántica de los primeros tiempos.

Es importante notar que :

- Para determinar los puntos de retorno uno hace $E = U(x)$ y por lo tanto las soluciones son funciones de la energía o sea $a, b = f(E)$ entonces los límites en la integral (93) dependen de la energía y entonces tenemos una formula donde tenemos que despejar $E = Q(n)$ que son los niveles de energía.

- n es el número de ceros de la función de onda en el intervalo $[a, b]$. Esto se ve porque observando la primera de las eqs.(91) cuando $x = a$ la fase del seno vale $\pi/4$ cuando llegamos a b la fase es $1/\hbar \int_a^b p(x)dx + \pi/4 = (n+1/2)\pi + \pi/4 = (n+3/4)\pi$ y cada vez que sumo π corto el eje x anulandose el seno y asi tengo n ceros como lo habiamos visto antes en general para los estados discretos.

- La aproximación cuasiclásica será válida para n grande (energía grande) cuando tenemos muchos ceros y por lo tanto la longitud de onda de de Broglie es pequeña.

- Cuando estudiamos la normalización de la función de onda tendremos (usando la primera de la (91) y suponiendo que la parte oscilatoria para muchos ceros es pequeña)

$$\begin{aligned}\int_a^b |\psi(x)|^2 dx &= C^2 \int_a^b sen^2 \left[1/\hbar \int_a^x p(x)dx + \pi/4\right] /p(x)dx \approx \frac{1}{2}C^2 \int_a^b 1/p(x)dx \equiv \pi C^2/2\omega = 1, \\ T &\equiv \int_a^b 1/p(x)dx, \omega = 2\pi/T\end{aligned}$$

donde aparece T el período clásico. Allí , debido a que al ser n alto la función seno al cuadrado oscila rápidamente hemos aproximado por su valor medio $1/2$. Finalmente, la función de onda normalizada queda

$$\psi(x) \quad = \quad \sqrt{\frac{2\omega}{\pi v(x)}} sen\left[1/\hbar \int_a^x p(x)dx + \pi/4\right], \quad x > a, \tag{94}$$

- Como a la integral $\oint p(x)dx$ se la puede considerar un área en el espacio de las fases y para n grande $\oint p(x)dx/n = 2\pi\hbar$ podemos pensar que a cada estado (dado que n es el número de estados) le corresponde un área $2\pi\hbar$.

- Cuando n grande $\Delta E = E_{n+1} - E_n << E_n$ y podemos hacer un desarrollo

$$\oint p(x)dx(E_{n+1}) - \oint p(x)dx(E_n) \approx \Delta E \oint \frac{\partial p(x)}{\partial E}dx = \Delta E \oint \frac{dx}{v(x)} = \Delta E \times T = 2\pi\hbar$$

de donde

$$\Delta E = \hbar\omega \tag{95}$$

cada frecuencia se calcula para cada nivel y son distintas, pero para un conjunto de niveles próximos las podemos considerar iguales a sí obtenemos uno conjunto de niveles equidistantes.

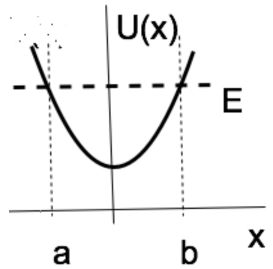
4.3.1 Ejemplo 1

Si queremos determinar los niveles de energía del oscilador armónico usando WKB tendriamos que hacer primeramente

$$\int_a^b p(x)dx = \pi\hbar(n+1/2),\ U(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$$

donde a, b son los puntos de retorno solución de

$$p(x) = \sqrt{2m(E - \frac{1}{2}m\omega^2x^2)} = 0 \Rightarrow -a = b = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}},$$



si aplicamos la regla de cuantización de Bohr-Sommerfeld tendremos sacando un factor $m\omega$ de la raiz

$$\begin{aligned}
m\omega\int_{-b}^{b}\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2} - x^2}dx &= m\omega\int_{-b}^{b}\sqrt{b^2 - x^2}dx = \pi\hbar(n+1/2) \\
&\overbrace{=}^{x=bcos\theta} m\omega\left[\int_{\pi}^{0}\sqrt{b^2 - b^2cos^2\theta}(-)bsen\theta d\theta\right] \\
&= m\omega b^2\int_0^{\pi} sen\theta sen\theta d\theta = m\omega b^2\int_0^{\pi}\frac{1 - cos2\theta}{2}d\theta = \frac{m\omega b^2\pi}{2} \\
\pi\hbar(n+1/2) &= \frac{m\omega b^2\pi}{2} = \cancel{m\omega}\frac{\cancel{2}E}{\cancel{2}\cancel{m}\omega^{\cancel{2}}}\pi \Rightarrow E_n = \hbar\omega(n+1/2),
\end{aligned}$$

que es el espectro hallado antes en forma exácta al resolver con el desarrollo en serie. Si ahora queremos analizar las funciones de onda debemos calcular

$$
\begin{aligned}
\psi(x) &= \frac{C_{II}}{\sqrt{p(x)}} sen((1/\hbar)\int_x^b \mathrm{p}(x)dx + \pi/4), \\
p(x) &= m\omega\sqrt{b^2 - x^2}, \int_x^b \mathrm{p}(x)dx = m\omega b^2\left(\frac{\theta}{2} - \frac{sen2\theta}{4}\right)|_0^{cos^{-1}(x/b)}, \\
sen2\theta &= 2sen\theta cos\theta = 2\sqrt{1 - cos\theta^2}cos\theta, \\
\int_x^b \mathrm{p}(x)dx &= m\omega b^2\left(\frac{cos^{-1}(x/b)}{2} - \frac{\sqrt{1-(x/b)^2}(x/b)}{2}\right) \\
\psi_n(x) &= \frac{C_{II}}{\sqrt{2mE_n}\left[1-(x/b_n)^2\right]^{1/4}} sen\left[(1/\hbar)m\omega b_n^2\left(\frac{cos^{-1}(x/b_n)}{2} - \frac{\sqrt{1-(x/b_n)^2}(x/b_n)}{2}\right) + \pi/4\right], x < b_n, \\
b_n &= \frac{2\hbar\omega(n+1/2)}{m\omega^2},
\end{aligned}
$$

donde si $x/b \ll 1$(lejos de los puntos de retorno) tendremos

$$
\psi_n(x) \approx \frac{C_{II}}{\sqrt{2mE_n}} sen\left(\frac{\omega\hbar(n+1/2)^2\pi}{m\omega^2} + \pi/4\right)\left[1 - \frac{(x/b_n)^2}{4}\right].
$$

4.3.2 Ejemplo2

Hallar los niveles de energía usando la aproximación semiclásica para una partícula de masa m en el potencial

$$
U(x) = mg|x|
$$

que corresponderia a la energia potencial gravitatória cuando $x > 0$ que sería la altura en la proximidad de la superficie terrestre. Los puntos de retorno se obtienen de $E = mgx \Longrightarrow a \equiv x_1 = -E/mg, b \equiv x_2 = E/mg.$

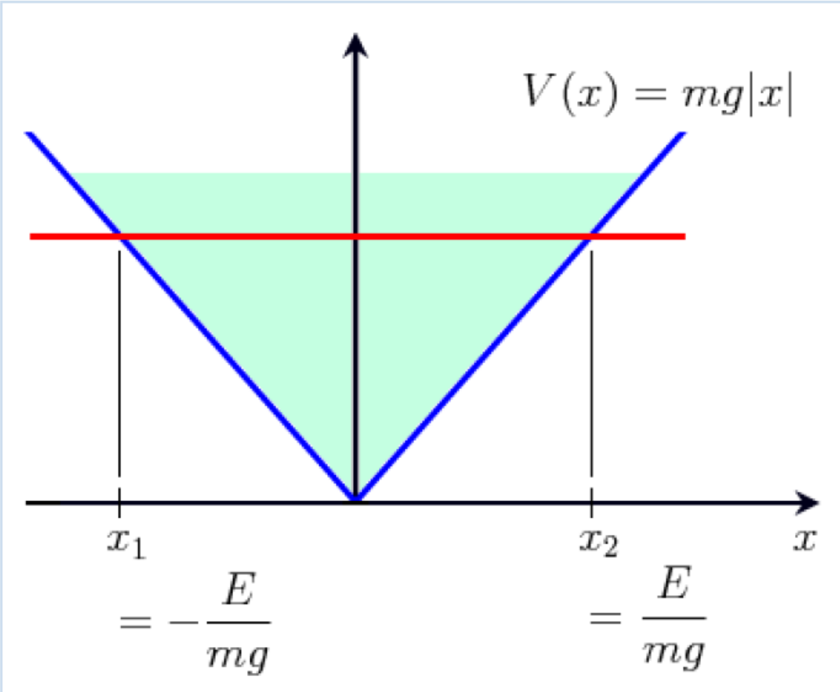


Figura 17: pozo triangular

1. Veamos la cuantificación de la energía.

$$
\begin{aligned}
2\int_a^b p(x)dx &= 2\int_{-E/mg}^{E/mg}\sqrt{2m(E-|x|)}dx = 4\int_0^{E/mg}\sqrt{2m(E-x)}dx = 2\pi\hbar(n+1/2) \\
\int_0^{E/mg}\sqrt{(E-x)}dx &= (\pi\hbar/2\sqrt{2m})(n+1/2) \\
\frac{-2}{3mg}(E-mgx)^{3/2}|_0^{E/mg} &= (\pi\hbar/2\sqrt{2m})(n+1/2) \\
E^{3/2} = 3mg/2 & \ (\pi\hbar/2\sqrt{2m})(n+1/2) = \frac{3\sqrt{mg}\pi}{4}\hbar(n+1/2) \\
E_n &= \left(\frac{9mg^2\pi^2}{16}\hbar^2\right)^{1/3}(n+1/2)^{2/3}
\end{aligned}
$$

- Como el potencial es simétrico tendremos funciones pares e impares como solución y como las impares tiene un número impar de ceros(siempre uno en el origen) corresponden a los n impares.

- Dichas funciones dan cero en el origen y con la función entre $x = 0, x = E_n/mg$ se puede modelar el problema de una pelota perfectamente elástica que choca contra el piso.

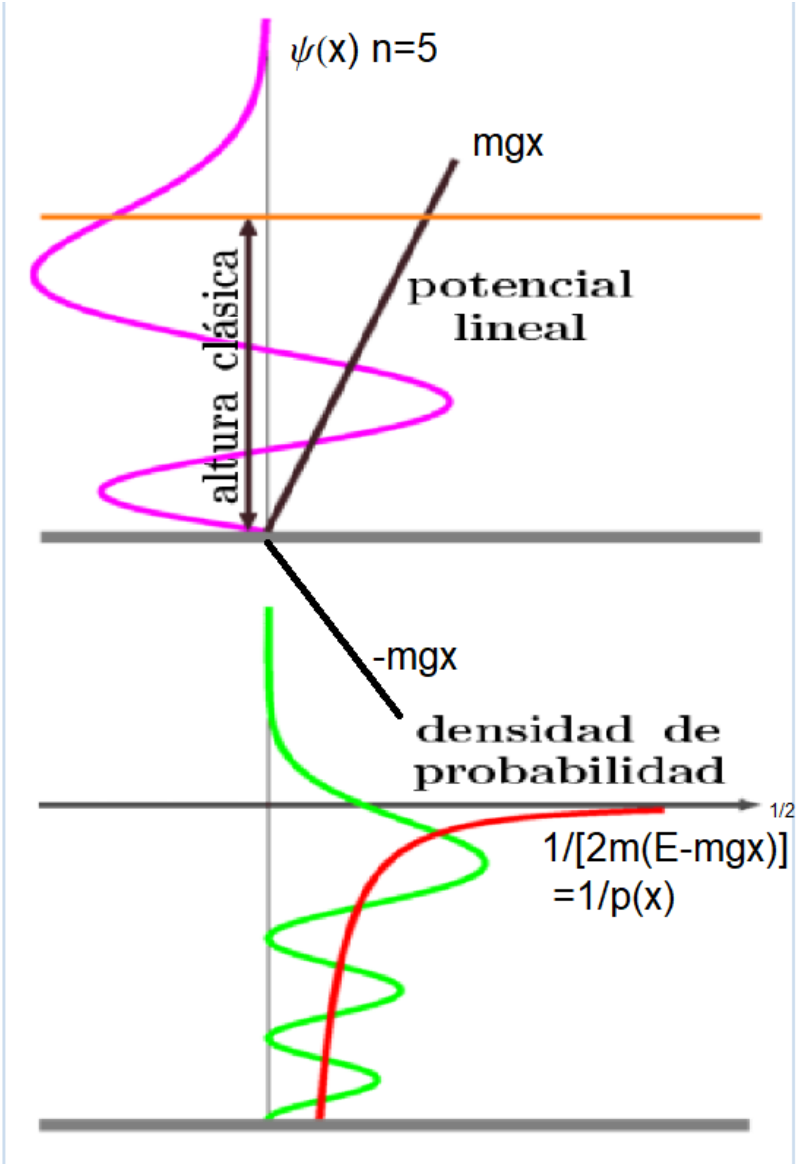


Figura 18: pelota rebotando elásticamente