

Figura 11: Escalón gradual

3.15 Coeficiente de transmisión

Analizemos ahora en forma más cuantitativa que sucede cuando una partícula se encuentra con un escalón de potencial que cumple

$$U(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} U(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} U(x) = U_0 \end{cases}$$

Las propiedades que demostraremos se cumplirán en particular para un escalón cuadrado. Vemos que $x_0 \mid E = U(x_0)$

1. **En mecánica clásica:** Si $E < U_0$ sabemos que una partícula clásica deberá ser reflejada hacia la izquierda pues en $x > x_0$ debería tener $T < 0$ que es absurdo, y moverse hacia la izquierda. En cambio si $E > U_0$ se seguirá moviendo hacia la derecha con una velocidad menor.
2. **En cuántica:** Las cosas no suceden igual. Si $E < U_0$ habrá cierta probabilidad de encontrar la partícula a la derecha del escalon y aún para $E > U_0$ hay probabilidad de que la partícula sea reflejada hacia la izquierda.

- Caso $E > U_0$

Veamos como calcular dicha probabilidad. Cuando $x \rightarrow \infty$ la función de onda debe representar una partícula que "ha pasado por encima" el muro de potencial y se mueve en el sentido positivo de las x , es decir debe tener una forma asintótica (ya lo analizamos antes)

$$x \rightarrow +\infty \quad \psi(x) \rightarrow Ae^{ik_{II}x} \equiv \psi_t, \quad k_{II} = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(E - U_0)}$$

mientras que la forma asintótica cuando $x \rightarrow -\infty$ deberá ser la suma de la onda incidente más la reflejada

$$x \rightarrow -\infty \quad \psi(x) \rightarrow e^{ik_I x} + Be^{-ik_I x} \equiv \psi_i + \psi_r, \quad k_I = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2mE}$$

donde asumimos que la función de onda va a estar normalizada de manera que el coeficiente de la onda incidente valga 1.

Recordemos la densidad de corriente de probabilidad, y para este caso será

$\mathbf{j}(x, t) = i\hbar/2m[\Psi(x, t)\partial_x\Psi(x, t)^* - \Psi^*(x, t)\partial_x\Psi(x, t)]\hat{i}$, $\Psi(x, t) = \psi(x)e^{-i(E/\hbar)t}$
 y así para cada contribución tendremos $\mathbf{j}(x, t)_i = \frac{\hbar}{m}k_I\hat{i}$, $\mathbf{j}(x, t)_r = -\frac{\hbar}{m}k_I|B|^2\hat{i}$, $\mathbf{j}(x, t)_t = \frac{\hbar}{m}k_{II}|A|^2\hat{i}$.

Vamos a definir el **coeficiente de transmisión como el cociente de la densidad de corriente de probabilidad de la onda transmitida a la densidad de la incidente en el mismo punto y tiempo**, vemos que ambas son paralelas y con el mismo signo en la componente x con lo que tendremos ($D \equiv \text{difracción}$)

$$D = |A|^2 (k_{II}/k_I) \quad (63)$$

de igual manera podemos definir el coeficiente de reflexión como la razón de la densidad de corriente reflejada a la incidente en cierto punto y tiempo

$$R = |B|^2. \quad (64)$$

Notemos que se debe cumplir que tanto la derivada de la función de onda como la función de onda deben ser continuas (es un potencial finito) en x_0 punto donde $E = U(x_0)$

$$e^{ik_I x_0} + Be^{-ik_I x_0} = Ae^{ik_{II} x_0} \quad (65)$$

$$ik_I e^{ik_I x_0} - ik_I Be^{-ik_I x_0} = ik_{II} Ae^{ik_{II} x_0} \quad (66)$$

si hacemos $ik_I \times (65) + (66)$ obtendremos

$$2ik_I e^{ik_I x_0} = i(k_I + k_{II})Ae^{ik_{II} x_0} \Rightarrow A = \frac{2ik_I e^{ik_I x_0}}{i(k_I + k_{II})e^{ik_{II} x_0}} \Rightarrow |A|^2 = \frac{4k_I^2}{(k_I + k_{II})^2}$$

y haciendo $ik_{II} \times (65) - (66)$ obtendremos

$$i(k_{II} - k_I)e^{ik_I x_0} + i(k_{II} + k_I)Be^{-ik_I x_0} = 0 \Rightarrow B = \frac{-i(k_{II} - k_I)e^{ik_I x_0}}{i(k_{II} + k_I)e^{-ik_I x_0}}$$

$$\Rightarrow |B|^2 = \frac{(k_{II} - k_I)^2}{(k_{II} + k_I)^2} = \frac{(k_{II} + k_I - 2k_I)^2}{(k_{II} + k_I)^2} = 1 - \frac{4k_I}{(k_{II} + k_I)} + \frac{4k_I^2}{(k_{II} + k_I)^2} = 1 - \frac{4k_I k_{II}}{(k_{II} + k_I)^2} = (1 - (k_{II}/k_I)|A|^2)$$

finalmente como esto lo hemos hecho para cualquier x_0 que cumpla con la condición $E = U(x_0)$ es válido e independiente de x_0 que

$$|B|^2 = (1 - (k_{II}/k_I)|A|^2) \quad (67)$$

con lo que tendremos que

$$D(E) = \frac{4k_I(E)k_{II}(E)}{(k_I(E) + k_{II}(E))^2} = \frac{4k_I(E)k_{II}(E)}{4k_I(E)k_{II}(E) + (k_I(E) - k_{II}(E))^2} < 1, \quad R(E) = 1 - D(E).$$

- Para el caso $E < U_0$

En este caso el k_{II} se vuelve imaginario puro y la solución acotada para la región II será

$$\psi_{II}(x) = Ae^{-\kappa_{II}x}, \kappa_{II} = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2m(U_0 - E)}$$

ahora $\mathbf{j}(x, t)_t = 0$ ya que la exponencial es real y por lo tanto la corriente reflejada es igual a la incidente no habiendo flujo de probabilidad hacia la derecha pero si una probabilidad no nula de hallar a la partícula que decae exponencialmente con un rango de decaimiento

$$\Delta x = 1/\kappa_{II} = \hbar/\sqrt{2m(U_0 - E)} = \hbar/\sqrt{2mT_{\uparrow}} = \hbar/\sqrt{2m\Delta_p^2/2m} = \hbar/\Delta p \Rightarrow \Delta x\Delta p = \hbar$$

o sea hay una relación entre la incerteza de encontrar a la partícula después de la barrera y el impulso adicional que deberíamos darle para superar la barrera que lo llamamos Δp .

También ahora podemos buscar los coeficientes imponiendo la continuidad de función y derivada

$$e^{ik_I x_0} + Be^{-ik_I x_0} = Ae^{-\kappa_{II} x_0} \quad (68)$$

$$ik_I e^{ik_I x_0} - ik_I B e^{-ik_I x_0} = -\kappa_{II} A e^{-\kappa_{II} x_0} \quad (69)$$

si hacemos $ik_I \times (68) + (69)$ obtendremos

$$2ik_I e^{ik_I x_0} = (ik_I - \kappa_{II}) A e^{-\kappa_{II} x_0} \Rightarrow A = \frac{2k_I e^{(ik_I + \kappa_{II})x_0}}{(k_I + i\kappa_{II})} \Rightarrow |A|^2 = \frac{4k_I^2 e^{2\kappa_{II} x_0}}{(k_I^2 + \kappa_{II}^2)^2}$$

y haciendo $\kappa_{II} \times (68) + (69)$ obtendremos

$$B = -\frac{\kappa_{II} + ik_I}{\kappa_{II} - ik_I} e^{i2k_I x_0} |B|^2 = \frac{|\kappa_{II} + ik_I|^2}{|\kappa_{II} - ik_I|^2} = 1$$

de donde

$$\mathbf{j}(x, t)_r = -\frac{\hbar}{m} k_I |B|^2 \hat{i} = -\frac{\hbar}{m} k_I \hat{i}, \quad D = 0, \quad R = 1.$$

Cuando

$$U_0 \rightarrow \infty, \kappa_{II} \rightarrow \infty, \psi_t(x_0) = Ae^{-\kappa_{II} x_0} = \frac{2k_I e^{ik_I x_0}}{(k_I + i\kappa_{II})} \rightarrow 0,$$

y por continuidad será cero la función de onda para $x > x_0$, mientras que

$$\psi_r(x_0) \rightarrow -e^{ik_I x_0} = -\psi_i(x_0),$$

si fuera un escalón cuadrado en $x_0 = 0$ tendríamos $B = -1, A = 0$ en este caso.

3.16 Barrera de potencial

Supongamos que la partícula se encuentra con un potencial de escalón o barrera

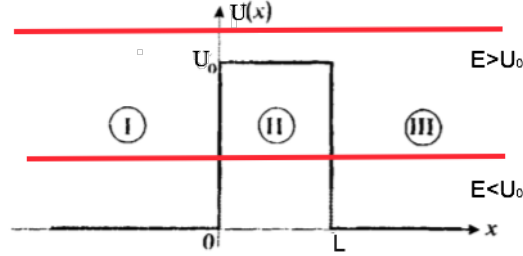


Figura 12: Barrera de potencial

donde debemos analizar dos casos al igual que con el pozo de potencial de profundidad $-U_0$ pero cambiando $-U_0 \rightarrow U_0$

- $E > U_0$ (Dispersión resonante)

En II:

$$\psi''(x) + (2m/\hbar^2)(E - U_0)\psi(x) = 0$$

En I,III:

$$\psi''(x) + (2m/\hbar^2)E\psi(x) = 0$$

que tienen soluciones (siempre las planteo como exponenciales complejas pero los k podrían ser imaginarios)

$$\psi(x) = \begin{cases} A_I e^{ik_I x} + A'_I e^{-ik_I x}, & x < 0 \\ A_{II} e^{ik_{II} x} + A'_{II} e^{-ik_{II} x} & 0 < x < L \\ A_{III} e^{ik_I x} + A'_{III} e^{-ik_I x} & x > L \end{cases}$$

con $k_I = \sqrt{(2mE/\hbar^2)}$, $k_{II} = \sqrt{(2m(E - U_0)/\hbar^2)}$.

Debemos imponer continuidad $\psi(0), \psi'(0)$ con lo podemos despejar A_I, A'_I en términos de A_{II}, A'_{II} e imponiendo la continuidad de $\psi(L), \psi'(L)$ despejar A_{II}, A'_{II} en términos de A_{III}, A'_{III} y de esta manera podemos despejar las constantes en la región I en función de A_{III} y tomamos $A'_{III} = 0$ pues suponemos que la partícula viene desde la izquierda.

Los resultados obtenidos van a ser

$$\begin{aligned} A_I &= \left[\cos k_{II} L - i \frac{k_I^2 + k_{II}^2}{2k_I k_{II}} \operatorname{sen} k_{II} L \right] e^{ik_I L} A_{III}, \\ A'_I &= \left[-i \frac{k_I^2 - k_{II}^2}{2k_I k_{II}} \operatorname{sen} k_{II} L \right] e^{ik_I L} A_{III}, \end{aligned} \quad (70)$$

y de la corriente de probabilidad calculada en escalón de potencial recordemos que (usando la notación actual)

$$\mathbf{j}(x, t)_i = \frac{\hbar}{m} k_I |A_I|^2 \hat{i}, \quad \mathbf{j}(x, t)_r = -\frac{\hbar}{m} k_I |A'_I|^2 \hat{i}, \quad \mathbf{j}(x, t)_t = \frac{\hbar}{m} k_I |A_{III}|^2 \hat{i},$$

y así los coeficientes de reflexión y transmisión (a la derecha de la barrera)

$$\begin{aligned} R &= \frac{|\mathbf{j}(x, t)_r|}{|\mathbf{j}(x, t)_i|} = \frac{|A'_I|^2}{|A_I|^2} = \frac{(k_I^2 - k_{II}^2)^2 \text{sen}^2 k_2 L}{4k_I^2 k_{II}^2 + (k_I^2 - k_{II}^2)^2 \text{sen}^2 k_2 L}, \\ T &= \frac{|\mathbf{j}(x, t)_t|}{|\mathbf{j}(x, t)_i|} = \frac{|A_{III}|^2}{|A_I|^2} = \frac{4k_I^2 k_{II}^2}{4k_I^2 k_{II}^2 + (k_I^2 - k_{II}^2)^2 \text{sen}^2 k_2 L}, \\ R + T &= \frac{4k_I^2 k_{II}^2 + (k_I^2 - k_{II}^2)^2 \text{sen}^2 k_2 L}{4k_I^2 k_{II}^2 + (k_I^2 - k_{II}^2)^2 \text{sen}^2 k_2 L} = 1. \end{aligned} \quad (71)$$

Sería interesante ver como cambian los coeficientes con la energía incidente, así si escribimos a $k_{I,II}$ según sus definiciones tendremos $(k_I^2 - k_{II}^2 = 2mU_0/\hbar^2)$

$$T(E) = \frac{4E(E - U_0)}{4E(E - U_0) + U_0^2 \text{sen}^2 \left(\sqrt{(2m(E - U_0)/\hbar^2)} L \right)},$$

donde podemos notar que para

$$\text{sen}^2 \left(\sqrt{(2m(E - U_0)/\hbar^2)} L \right) = 0 \Rightarrow \sqrt{(2m(E - U_0)/\hbar^2)} L = n\pi \Rightarrow k_{II} L = n\pi,$$

que significa que *la semi longitud de onda de de Broglie de la partícula $\lambda = 2\pi/k_{II} = 2L/n \Rightarrow n\lambda/2 = L$ entra n veces en L , eso corresponde a energías $E_n = \frac{(n\pi)^2 \hbar^2}{2mL^2} + U_0$, vale $T = 1, R = 0$. Este fenomeno se denomina *dispersión resonante*.*

Graficamente tendremos

- $E < U_0$ (Efecto tunel)

Cuando estamos incidiendo con energías en esta región, debemos cambiar la solución en la región II ya que no tendremos funciones oscilatorias sino exponenciales decrecientes, esto lo hacemos cambiando $k_{II} \rightarrow -i\kappa_{II}, \kappa_{II} = \sqrt{2m(U_0 - E)/\hbar^2}$ de manera de tener soluciones exponencialmente decrecientes para $x \in (0, L)$.

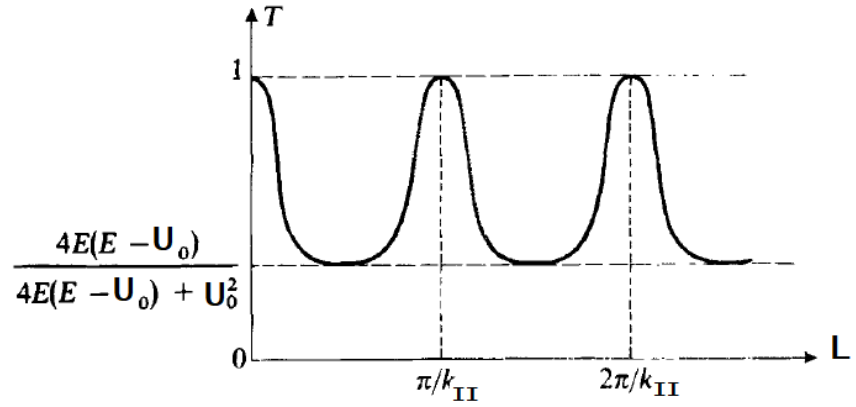


Figura 13: Dispersión resonante. Se muestran el mínimo y máximo de T .

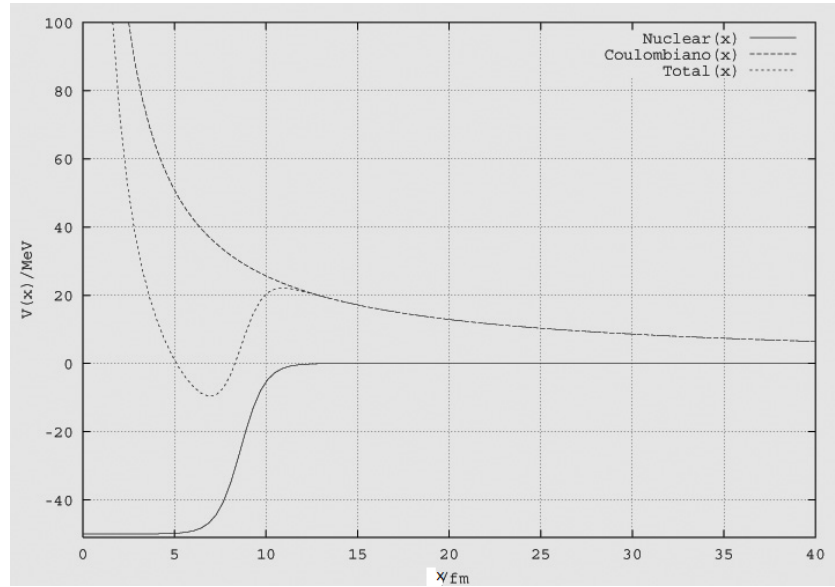


Figura 14: Potencial que siente una partícula α en el núcleo

Si ahora imponemos nuevamente las condiciones de continuidad de función y derivada en $x = 0, L$ obtendríamos nuevamente los coeficientes y de allí T, R . Pero podríamos observar que

$$\begin{aligned} \cos k_{II} &= \frac{e^{ik_{II}} + e^{-ik_{II}}}{2} \rightarrow \frac{e^{\kappa_{II}} + e^{-\kappa_{II}}}{2} = \cosh \kappa_{II}, \\ \sen k_{II} &= -i \frac{e^{ik_{II}} - e^{-ik_{II}}}{2} \rightarrow -i \frac{e^{\kappa_{II}} - e^{-\kappa_{II}}}{2} = -i \cosh \kappa_{II} \\ k_I^2 + \kappa_{II}^2 &= 2mU_0/\hbar^2 \end{aligned}$$

con lo reemplazando $k_{II} \rightarrow -i\kappa_{II}$ en (71) y las definiciones de k_I, κ_{II} obtendremos

$$T(E) = \frac{4E(-E + U_0)}{4E(-E + U_0) + U_0^2 \senh^2 \left(\sqrt{2m(-E + U_0)/\hbar^2} L \right)}.$$

La función de onda para $x \in [0, L]$ es

$$A_{II}e^{\kappa_{II}x} + A'_{II}e^{-\kappa_{II}x}$$

cuando le hacemos satisfacer las condiciones en L conducen a

$$A_{II} = \frac{(\kappa_{II} + ik_I)}{2\kappa_{II}}e^{-\kappa_{II}L}e^{ik_IL}, A'_{II} = \frac{(\kappa_{II} - ik_I)}{2\kappa_{II}}e^{\kappa_{II}L}e^{ik_IL}$$

donde si nos ponemos en la situación $\kappa_{II}L \gg 1$ que **es una barrera alta** ($\kappa_{II} = \sqrt{2m(U_0 - E)/\hbar^2}$) y **ancha** obtenemos, que el que subsiste es $A'_{II}e^{-\kappa_{II}x}$ pues $A_{II} \rightarrow 0$ y el coeficiente de transmisión se obtiene haciendo $\sinh \kappa_{II}L = \sinh^2 \left(\sqrt{(2m(-E + U_0)/\hbar^2)L} \right) \approx e^{2\kappa_{II}L}/4$ y despreciando $4E(-E + U_0)e^{-2\kappa_{II}L}$ frente a $U_0^2/4$ y obtendremos

$$T(E) \approx \frac{16E(-E + U_0)}{U_0^2}e^{-2\kappa_{II}(E, U_0)L}. \quad (72)$$

Así contrariamente a la predicción clásica, la probabilidad de que la partícula cruce la barrera es no nula y la probabilidad de que la partícula esté en la región II tampoco es nula. Esto se denomina efecto túnel y es el responsable, por ejemplo, del decaimiento α donde un núcleo de Helio se desprende del núcleo para liberar energía y tenemos un potencial debido a la superposición de la interacción fuerte atractiva y la coulombiana repulsiva como se muestra en la fig.(19).

Si U_0 se hace pequeño también $U_0 - E$ para estar en dicha región de energías y si L es pequeño entonces para una barrera baja y angosta $\kappa_{II}L \rightarrow 0 \Rightarrow \sinh \kappa_{II}L \rightarrow 0, T \rightarrow 1$, o sea la probabilidad de cruzar es casi certeza.

Un aspecto interesante del efecto túnel concierne a su interpretación a la luz del principio de incerteza: digamos que la indeterminación de la posición de una partícula cuántica y la de su impulso están ligadas según la relación:

$$\Delta x \Delta p \gtrsim \hbar$$

si suponemos que la incerteza en encontrar la partícula es $\Delta x = 1/\kappa_{II} \Rightarrow \Delta p \gtrsim \hbar/\Delta x = \hbar\kappa_{II} = \sqrt{2m(-E + U_0)}$ y una incerteza en la energía $\Delta E \sim \Delta p^2/2m = U_0 - E$ que es lo que nos falta para superar la barrera, en realidad no podemos afirmar que la partícula no tiene la energía para cruzar la barrera.

Podemos hacer la comparación de cuanto vale el coeficiente de transmisión para dos partículas de masas muy diferentes como el electrón $m = 0.511\text{MeV}$ y protón con la misma barrera y energías incidentes. Así

$$\begin{aligned}
(\kappa_{II}L)_e &= \left(1/\sqrt{2m(U_0 - E)/\hbar^2}\right)_e^{-1} = \frac{L\sqrt{U_0 - E}}{197\text{MeV}\cdot\text{fm}}, \\
(\kappa_{II}L)_p &= \frac{L\sqrt{U_0 - E}}{4.47\text{MeV}\cdot\text{fm}},
\end{aligned}$$

lo que muestra que si usamos la expresión aproximada (72) para un conjunto de valores L, U_0, E que la satisfagan $L\sqrt{U_0 - E} \gg 200\text{MeV}\cdot\text{fm}$, $e^{-2(\kappa_{II}L)_p} \ll e^{-2(\kappa_{II}L)_e}$ lo que indica $T_p/T_e = e^{-2(\kappa_{II}L)_p}/e^{-2(\kappa_{II}L)_e} \ll 1$. Así el protón es más "*clásico*" en estas circunstancias que el electrón.