PROF: Pablo Pisani
JTP: Lucas Manzo
AD: Tomás Vignau

Práctica 5

Los ejercicios marcados con asterisco (*) son opcionales.

5.1 Suma de momentos angulares

67. Sean $\hat{\boldsymbol{K}}_{(1)}$ y $\hat{\boldsymbol{K}}_{(2)}$ dos momentos angulares arbitrarios. Cada uno de ellos puede ser un momento angular orbital $\hat{\boldsymbol{L}}$, un momento angular de espín $\hat{\boldsymbol{S}}$, o un momento angular total $\hat{\boldsymbol{J}} = \hat{\boldsymbol{L}} + \hat{\boldsymbol{S}}$. La suma de momentos se define por $\hat{\boldsymbol{K}} := \hat{\boldsymbol{K}}_{(1)} + \hat{\boldsymbol{K}}_{(2)}$.

    a. Probar

    $$\hat{\boldsymbol{K}}_{(1)} \cdot \hat{\boldsymbol{K}}_{(2)} = \hat{K}_{(1)z}\hat{K}_{(2)z} + \frac{1}{2}\hat{K}_{(1)+}\hat{K}_{(2)-} + \frac{1}{2}\hat{K}_{(1)-}\hat{K}_{(2)+} \ ,$$

    donde $\hat{K}_{(i)\pm} := \hat{K}_{(i)x} \pm i\hat{K}_{(i)y}$ son los *operadores escalera* que satisfacen las propiedades de los problemas 56 y 58.

    b. Probar

    $$\hat{\boldsymbol{K}}^2 = \hat{\boldsymbol{K}}^2_{(1)} + \hat{\boldsymbol{K}}^2_{(2)} + 2\hat{K}_{(1)z}\hat{K}_{(2)z} + \hat{K}_{(1)+}\hat{K}_{(2)-} + \hat{K}_{(1)-}\hat{K}_{(2)+} \ .$$

68. Dos átomos con $j_1 = 1$ y $j_2 = 2$ están acoplados por medio del hamiltoniano $\hat{H} = \epsilon\, \hat{\boldsymbol{J}}_{(1)} \cdot \hat{\boldsymbol{J}}_{(2)}$ con $\epsilon > 0$. Determinar todas las energías y sus degeneraciones para el sistema acoplado.

69. Un sistema de dos partículas independientes de espín 1/2 cuyo movimiento orbital es despreciable está descripto por la base $|s_1 = 1/2, m_1; s_2 = 1/2, m_2\rangle \equiv |m_1, m_2\rangle$, en donde $|m_1, m_2\rangle$ son autoestados comunes de $\hat{\boldsymbol{S}}^2_{(1)}$, $\hat{\boldsymbol{S}}^2_{(2)}$, $\hat{S}_{(1)z}$ y $\hat{S}_{(2)z}$. Considerar el operador de espín total $\hat{\boldsymbol{S}} := \hat{\boldsymbol{S}}_{(1)} + \hat{\boldsymbol{S}}_{(2)}$ con componentes $\hat{\boldsymbol{S}} = (\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z)$ y magnitud $\hat{\boldsymbol{S}}^2 = |\hat{\boldsymbol{S}}_{(1)} + \hat{\boldsymbol{S}}_{(2)}|^2$.

    a. Calcular el resultado de aplicar los operadores $\hat{S}_\pm$ y $\hat{S}_z$ sobre los cuatro estados diferentes $|m_1, m_2\rangle$.

b. Utilizando la expresión del problema 67b, calcular el resultado de aplicar el operador $\hat{\boldsymbol{S}}^2$ sobre los cuatro estados diferentes $|m_1, m_2\rangle$.

c. Construir los estados $|s, m_s\rangle$, los cuales son autoestados de $\hat{\boldsymbol{S}}^2_{(1)}$, $\hat{\boldsymbol{S}}^2_{(2)}$, $\hat{\boldsymbol{S}}^2$ y $\hat{S}_z$, como combinación lineal de los cuatro estados diferentes $|m_1, m_2\rangle$. Encontrar los correspondientes autovalores y verificar que $\hat{\boldsymbol{S}}^2|s, m_s\rangle = \hbar^2\, s(s+1)|s, m_s\rangle$ y que $\hat{S}_z|s, m_s\rangle = \hbar\, m_s\, |s, m_s\rangle$.

d. Discutir las propiedades de paridad de cada uno de los estados $|s, m_s\rangle$ ante un intercambio de partículas $(1) \longleftrightarrow (2)$.

70. Considerar nuevamente, como en el problema 67, la suma de dos momentos angulares arbitrarios. Sea $|k_1, m_1; k_2, m_2\rangle$ un estado tal que

$$\hat{\boldsymbol{K}}^2_{(i)}|k_1, m_1; k_2, m_2\rangle = \hbar^2\, k_i(k_i+1)\, |k_1, m_1; k_2, m_2\rangle \ ,$$
$$\hat{K}_{(i)z}|k_1, m_1; k_2, m_2\rangle = \hbar\, m_i\, |k_1, m_1; k_2, m_2\rangle \ .$$

Sea además $|k, m\rangle$ un estado tal que

$$\hat{\boldsymbol{K}}^2|k, m\rangle = \hbar^2\, k(k+1)\, |k, m\rangle \ , \qquad \hat{K}_z|k, m\rangle = \hbar\, m\, |k, m\rangle \ .$$

Es posible escribir, para k_1 y k_2 fijos, a los estados $|k, m\rangle$ en término de los estados $|k_1, m_1; k_2, m_2\rangle$ en la forma

$$|k, m\rangle = \sum_{m_1=-k_1}^{k_1} \sum_{m_2=-k_2}^{k_2} \langle k_1, m_1; k_2, m_2|k, m\rangle\, |k_1, m_1; k_2, m_2\rangle \ .$$

A los coeficientes $\langle k_1, m_1; k_2, m_2|k, m\rangle$ se los denomina *coeficientes de Clebsch-Gordan*.

a. Probar que $\langle k_1, m_1; k_2, m_2|k, m\rangle \neq 0$ si y sólo si $m = m_1 + m_2$.

b. Calcular los coeficientes de Clebsch-Gordan $\langle m_1, m_2|s, m_s\rangle$ para los estados $|s, m_s\rangle$ del problema 69.

71.* Considerar un estado de momento angular total $|j, m_j = l - 1/2\rangle$ con $\hat{\boldsymbol{J}} = \hat{\boldsymbol{L}} + \hat{\boldsymbol{S}}$ para una partícula de espín $s = 1/2$ y momento angular orbital $l \geq 1$ arbitrario. Escribir a dicho estado en término de los estados $|l, m_l; s = 1/2, m_s\rangle$.

Sugerencia: considerar separadamente los casos $j = l + 1/2$ y $j = l - 1/2$, que son los únicos dos posibles valores para j. Para el primero de estos casos, probar que $|j = l + 1/2, m_j = l + 1/2\rangle = |l, l; 1/2, 1/2\rangle$ y luego aplicar el operador escalera $\hat{\boldsymbol{J}}_- = \hat{\boldsymbol{L}}_- + \hat{\boldsymbol{S}}_-$.