

Práctica 6

Los ejercicios marcados con asterisco () son opcionales.*

6.1	Oscilador armónico bidimensional	1
6.2	Problema de Landau	2
6.3	Teoría de perturbaciones (ind. del tiempo)	4

6.1 Oscilador armónico bidimensional

72. Considerar un oscilador armónico bidimensional isotrópico. En términos de los operadores de creación y aniquilación, puede escribirse a su hamiltoniano como

$$\hat{H} = \hbar\omega(\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1 + \hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2 + 1),$$

donde dichos operadores satisfacen el álgebra usual:

$$[\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger] = \delta_{ij},$$

con todos los demás conmutadores iguales a cero.

- a. Defínense ahora los siguientes tres operadores:

$$\begin{aligned}\hat{J}_1 &= \frac{1}{2}[\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2 + \hat{a}_2^\dagger\hat{a}_1], \\ \hat{J}_2 &= -\frac{i}{2}[\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2 - \hat{a}_2^\dagger\hat{a}_1], \\ \hat{J}_3 &= \frac{1}{2}[\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1 - \hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2].\end{aligned}$$

Probar que estos operadores generan el álgebra del grupo SU(2), es decir, que satisfacen la regla de conmutación $[\hat{J}_i, \hat{J}_j] = i\epsilon_{ijk}\hat{J}_k$.

- b. Probar, a partir de los operadores anteriores, que el oscilador armónico posee una simetría $SU(2)$. Es decir, probar que se satisface la regla de conmutación $[\hat{J}_i, \hat{H}] = 0$.
- c. Se define al *operador cuadrático de Casimir* como $\hat{J}^2 = \hat{J}_1^2 + \hat{J}_2^2 + \hat{J}_3^2$. Calcularlo en términos de los operadores de creación y aniquilación para, finalmente, verificar la relación

$$\hat{J}^2 = \frac{1}{4} \left(\frac{\hat{H}^2}{(\hbar\omega)^2} - 1 \right).$$

- d. Sabiendo que los autovalores del operador \hat{J}^2 son $j(j+1)$ con $j \geq 0$ (¿por qué esto es cierto?), determinar las energías del sistema.
- e. Discutir la degeneración de cada nivel de energía en términos del resultado anterior.

6.2 Problema de Landau

73. Considerar una partícula en un campo magnético externo uniforme que apunta en la dirección z , de modo que $\mathbf{B} = (0, 0, B)$. El potencial vector, en el *gauge de Landau*, está dado por $\mathbf{A} = (0, Bx, 0)$.

- a. Probar que, en el gauge de Landau, la ecuación de Schrödinger toma la forma

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial}{\partial y} - \frac{ie}{\hbar} Bx \right)^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \Psi(x, y, z) = E \Psi(x, y, z).$$

- b. Proponiendo una solución de la forma $\Psi(x, y, z) = \psi(x) e^{ip_y y/\hbar} e^{ip_z z/\hbar}$, probar que la ecuación anterior se convierte en

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{e^2 B^2}{\hbar^2} (x - x_0)^2 \right] \psi(x) = \left(E - \frac{p_z^2}{2m} \right) \psi(x),$$

donde $x_0 = p_y/eB$.

- c. Observando que la ecuación diferencial anterior corresponde a la de un oscilador armónico unidimensional, probar que las energías están dadas por

$$E_{n,p_z} = \frac{p_z^2}{2m} + \frac{\hbar e B}{m} \left(n + \frac{1}{2} \right).$$

- d. Suponer ahora que el dominio en el eje y es un segmento de recta de longitud L_y , de modo que resulta $|y| < L_y/2$. Considerando condiciones de borde periódicas en el eje y , probar

$$p_y = 2\pi k \frac{\hbar}{L_y}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

- e. Usar el resultado del inciso anterior para probar que la densidad de estados g (es decir, el número de estados por unidad de área) está dado por $g = eB/2\pi\hbar$.

74. Considerar que al problema anterior se le añada un campo eléctrico externo uniforme en la dirección x , de modo que $\mathbf{E} = (\mathcal{E}, 0, 0)$. En el mismo gauge de Landau, el potencial escalar está dado por $\phi = -\mathcal{E}x$.

- a. Probar que la ecuación de Schrödinger toma la forma

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial}{\partial y} - \frac{ie}{\hbar} Bx \right)^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] - e\mathcal{E}x \right\} \Psi(x, y, z) = E \Psi(x, y, z).$$

- b. Proponiendo una solución de la forma $\Psi(x, y, z) = \psi(x) e^{ip_y y/\hbar} e^{ip_z z/\hbar}$, probar que la ecuación anterior se convierte en

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{e^2 B^2}{\hbar^2} (x - x_0)^2 \right] \psi(x) = \left(E - \frac{p_z^2}{2m} + \frac{p_y \mathcal{E}}{B} + \frac{m\mathcal{E}^2}{2B^2} \right) \psi(x),$$

donde $x_0 = \frac{p_y}{eB} + \frac{m\mathcal{E}}{eB^2}$.

- c. Observando que la ecuación diferencial anterior corresponde a la de un oscilador armónico unidimensional, probar que las energías están dadas por

$$E_{n,p_y,p_z} = \frac{p_z^2}{2m} + \frac{\hbar e B}{m} \left(n + \frac{1}{2} \right) - \frac{p_y \mathcal{E}}{B} - \frac{m\mathcal{E}^2}{2B^2}.$$

Nota: observando que el último término puede ser descartado por ser una cantidad constante, resulta que la introducción de un campo eléctrico ortogonal a la dirección del campo magnético introduce un factor $-p_y \mathcal{E}/B$ en la energía. Es decir, las energías sí dependen del número cuántico p_y en presencia de dicho campo eléctrico, mientras que son independientes de p_y en ausencia del mismo.

75. Un estado fundamental de Landau en presencia de un campo eléctrico (tal y como fue descrito en el problema anterior) está dado por los números cuánticos $n = 0$, $p_z = 0$. La función de onda toma la forma

$$\Psi_{0,p_y}(x, y, z) = \frac{e^{ip_y y/\hbar}}{\sqrt{L_y}} \left(\frac{eB}{\pi\hbar} \right)^{1/4} e^{-\frac{eB}{2\hbar}(x-x_0)^2}, \quad x_0 = \frac{p_y}{eB} + \frac{m\mathcal{E}}{eB^2}.$$

- a. Calcular la densidad de corriente de probabilidad $j_y(x)$ en la dirección y para dicho estado, dada por

$$j_y = \frac{\hbar}{m} \text{Im} \left\{ \Psi_{0,p_y}^* \left(\frac{\partial}{\partial y} - \frac{ie}{\hbar} A_y \right) \Psi_{0,p_y} \right\}.$$

- b. Probar que la corriente total de probabilidad en un punto y , definida mediante $\mathcal{J}_y = \int_{-\infty}^{\infty} dx j_y(x)$, está dada por

$$\mathcal{J}_y = -\frac{\mathcal{E}}{BL_y}.$$

Nota: es fácil probar que la corriente eléctrica I_y en un punto y es proporcional a la corriente de probabilidad \mathcal{J}_y . Esto implica que $I_y \neq 0$ cuando $\mathcal{E} \neq 0$, lo que se conoce como *efecto Hall cuántico*.

6.3 Teoría de perturbaciones (ind. del tiempo)

76. Considerar el potencial del oscilador armónico unidimensional $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$, perturbado mediante un término lineal de la forma $V_p(x) = \lambda\hbar\omega x$.
- Calcular la corrección de la energía a primer orden en teoría de perturbaciones para cualquier estado $|n\rangle_{(0)}$ del sistema sin perturbar.
Sugerencia: escribir al factor x de la perturbación en términos de los operadores de creación y destrucción. Se sugiere emplear esta misma representación a lo largo de todo el presente ejercicio.
 - Calcular la corrección de la función de onda a primer orden en teoría de perturbaciones para cualquier estado $|n\rangle_{(0)}$ del sistema sin perturbar.
 - Calcular la corrección de la energía a segundo orden en teoría de perturbaciones para cualquier estado $|n\rangle_{(0)}$ del sistema sin perturbar.
 - Resolver el problema de forma exacta y comparar estos resultados con los de los tres incisos anteriores.
77. Considerar el potencial del oscilador armónico bidimensional isotrópico $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2)$, perturbado mediante un término cuadrático “cruzado” de la forma $V_p(x) = m\omega_p^2xy$.
- Calcular la corrección de la energía a primer orden en teoría de perturbaciones para el estado fundamental del sistema sin perturbar.
 - Calcular la corrección de la energía a segundo orden en teoría de perturbaciones para el estado fundamental del sistema sin perturbar.
 - Comparar estos resultados con la solución exacta, dada en el problema 55.
 - ¿Qué complicación surge si, en lugar de estudiar el estado fundamental, se desea estudiar la corrección de la energía para cualquier estado excitado?
78. Cuando un átomo hidrogenoide es colocado en un campo eléctrico externo uniforme \mathcal{E} (que se supondrá que apunta en la dirección z), los niveles degenerados de energía experimentan una separación. Este es el llamado *efecto Stark lineal*. Para resolver este problema se usa la teoría de perturbaciones para el caso degenerado (siempre que la magnitud del campo externo sea lo suficientemente pequeña) y se trata a la energía potencial del electrón en el campo eléctrico \mathcal{E} como una perturbación: $V_p = -e|\mathcal{E}|z$. Los niveles $|n\rangle_{(0)}$ del átomo son, a lo sumo, n^2 veces degenerados: es decir que, en particular, el nivel $n = 2$ es a lo sumo 4 veces degenerado. Las cuatro autofunciones que poseen la energía $E_2^{(0)}$ del átomo no perturbado son:

$$\begin{aligned}\Psi_{2,0,0}(r, \theta, \phi) &= \frac{1 - r/2a}{\sqrt{2a^3}} e^{-r/2a} Y_{0,0}(\theta, \phi) , \\ \Psi_{2,1,0}(r, \theta, \phi) &= \frac{r/2a}{\sqrt{6a^3}} e^{-r/2a} Y_{1,0}(\theta, \phi) , \\ \Psi_{2,1,\pm 1}(r, \theta, \phi) &= \frac{r/2a}{\sqrt{6a^3}} e^{-r/2a} Y_{1,\pm 1}(\theta, \phi) ,\end{aligned}$$

donde $a = 4\pi\epsilon_0\hbar^2/\mu Ze^2$.

- a. Hallar la separación de los niveles de energía para $n = 2$.
- b. Hallar las autofunciones correspondientes.