Mecánica Cuántica I

Año 2019

Prof: Alejandro Mariano — JTP: Mauricio Matera – Ay. Dipl: Mariela Nieto

Práctica 1 — La ecuación de Schrödinger

Propiedades y evolución temporal de paquetes de onda.

Problema 1.

a) Deducir la ecuación de continuidad asociada a la ecuación de Schrödinger unidimensional.

b) Escribala para estados estacionarios.

c) ¿Qué podemos concluir sobre la densidad de corriente para el caso estacionario en una dimensión?

Problema 2. Dado el siguiente paquete de ondas en una dimensión,

$$\psi(x,0) = C^{-1/2} \exp\left(-\frac{x^2}{4\Delta x^2} + \mathbf{i}kx\right)$$

a) Calcular la correspondiente distribución en impulsos.

b) Considerando evolución libre, hallar $\psi(x,t)$. Verificar que el paquete avanza según las leyes clásicas, pero la evolución dispersa al paquete, esto es, su ancho en espacio de coordenadas aumenta. Tip: proponga como solución de la Ec. de Schödinger funciones de onda de la forma

$$\psi(x,0) = C(t)^{-1/2} \exp\left(-a(t)\frac{(x-x_0(t))^2}{4\Delta x^2} + \mathbf{i}k(t)x + \mathbf{i}\phi(t)\right)$$

y determine las funciones reales $x_0(t)$, $k(t)$,$\phi(t)$ y $C(t)$, y la función compleja $a(t)$ tales que $\psi(x,t)$ satisfaga la ecuación de Schödinger en todo el espacio.

c) Grafique $\|\psi(x,t)\|^2$ para tiempos $t_n = nm\Delta\frac{x(0)^2}{4\hbar}$ con $n = 0,\ldots 9$.

d) Usando el mísmo método, determine la evolución del paquete en presencia de un potencial

a) Lineal ($U(x) = -Fx$) b) Cuadrático ($V(x) = \frac{m\omega^2}{2}(x-x_0)^2$)

Problema 3. Considere un paquete de ondas en una dimensión

$$\psi(x,0) = \int_{-\infty}^{\infty} g(k)e^{\mathbf{i}kx}\frac{dk}{2\pi}$$

con $g(k) = |g(k)|e^{\mathbf{i}\alpha(k)}$ y $\alpha(k)$ suficientemente regular en el intervalo $|k-k_0| < \Delta k/2$ donde $|g(k)|$ es apreciable.

a) Obtener una forma aproximada para $\psi(x,0)$. Analizar la forma del paquete y determinar su centro $x_M(0)$. ¿En qué intervalo es apreciable la probabilidad de encontrar la partícula representada por ese paquete? ¿Cómo se relaciona este intervalo con Δk?

b) Repetir el razonamiento anterior para analizar la evolución temporal (libre) del paquete. Determinar $x_M(t)$. Calcular la velocidad del máximo del paquete de ondas (velocidad de grupo) y compararla con la velocidad de fase.

Problema 4. Considere un paquete de ondas gaussiano en tres dimensiones:

$$g(\vec{k}) = \frac{\alpha^{3/2}}{\sqrt{8\pi^3}}e^{-\frac{\alpha^2}{4}|\vec{k}-\vec{k}_0|^2}$$

a) Calcule la densidad de probabilidad correspondiente.

b) Estudie la evolución temporal del paquete de ondas.

c) Calcule $\Delta x(t)$ y $\Delta p(t)$. Interprete su producto en el estado inicial y posteriormente.

Problema 5. Calcular los coeficientes de transmisión y reflexión para una barrera de potencial de la forma

$$V(x) = \begin{cases} U_0 \frac{x}{a} & 0 < x < a \\ 0 & x < 0 \vee x > a \end{cases}$$

para el caso de una partícula con impulso k que se acerca a la barrera desde $x = -\infty$. Nota: Consultar las propiedades de las funciones de Airy en `https://dlmf.nist.gov/9`