Mecánica Cuántica I

Año 2019

Prof: Alejandro Mariano — JTP: Mauricio Matera – Ay. Dipl: Mariela Nieto

Práctica 5 — Generadores de simetría

y representación matricial de operadores

Problema 1.

1. Siendo $\mathbf{x}$ y $\mathbf{p}$ los operadores coordenada y momento en una dimensión. Calcular los conmutadores $[\mathbf{x}, F(\mathbf{p})]$ y $[\mathbf{p}, G(\mathbf{x})]$ donde F y G son funciones arbitrarias desarrollables en serie de potencias.
2. Encontrar la relación de incerteza para los operadores $\mathbf{x}$ y $F(\mathbf{p})$.
3. Probar que $e^{\frac{\mathbf{i}}{\hbar}a\mathbf{p}}|x'\rangle$ y $e^{-\frac{\mathbf{i}}{\hbar}k\mathbf{x}}|p'\rangle$ son autoestados de $\mathbf{x}$ y $\mathbf{p}$ respectivamente, y halle sus autovalores. Interpretar físicamente los operadores exponenciales.

Problema 2.

1. Determinar los desarrollos de un estado $|\psi\rangle$ arbitrario en las bases de autoestados de $\mathbf{x}$ y $\mathbf{p}$. Hallar la relación entre las coordenadas del estado en base $\{|x\rangle\}$ y sus coordenadas en base $\{|p\rangle\}$.
2. Probar que
$$\langle p'|\mathbf{x}|\alpha\rangle = \mathbf{i}\hbar\,\frac{\partial}{\partial p'}\phi_\alpha(p') \qquad \langle x'|\mathbf{p}\,|\alpha\rangle = -\mathbf{i}\hbar\,\frac{\partial}{\partial x'}\psi_\alpha(x')$$
$$\langle\beta|\mathbf{x}|\alpha\rangle = \int\, dp'\,\phi^*_\beta(p')\,\mathbf{i}\hbar\frac{\partial}{\partial p'}\phi_\alpha(p')$$
$$\langle\beta|\mathbf{p}\,|\alpha\rangle = \int\, dx'\,\psi^*_\beta(x')(-i\hbar)\frac{\partial}{\partial x'}\psi_\alpha(x')$$
donde $\psi_\alpha(x') \equiv \langle x'|\alpha\rangle$ y $\phi_\alpha(p') = \langle p'|\alpha\rangle$ son las coordenadas introducidas en el ítem anterior.
3. Dado el hamiltoniano clásico $\mathbf{H} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \mathbf{V}$ escribir la ecuación de Schrödinger en espacio de impulsos.
4. Dada la función de onda de una partícula en una dimensión $\psi(x)$, expresar la probabilidad de hallarla viajando hacia la derecha.

Problema 3. Operadores escalera. Considere una partícula de masa m en una dimensión. Se definen los operadores de aniquilación $\mathbf{a}$ y creación $\mathbf{a}^\dagger$ y el operador número $\mathbf{N}$ por

$$\mathbf{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\mathbf{x} + \mathbf{i}\frac{\mathbf{p}}{m\omega}\right)\ ,\quad \mathbf{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\mathbf{x} - \mathbf{i}\frac{\mathbf{p}}{m\omega}\right)\ ,\quad \mathbf{N} = \mathbf{a}^\dagger\,\mathbf{a},$$

donde ω es una constante con dimensiones $[\mathrm{s}]^{-1}$.

1. Encuentre el álgebra de conmutadores de dichos operadores
2. Se definen los estados
$$\mathbf{a}\,|0\rangle \equiv 0\ ,\quad |n\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{n!}}\left(\mathbf{a}^\dagger\right)^n|0\rangle\ ,$$
donde $|0\rangle$ es el vacío de Fock normalizado a $\langle 0\,|0\,\rangle = 1$. Demuestre que los estados $|n\rangle$ son una base de una representación del álgebra del ítem $a)$ hallando la acción de los operadores sobre ella. Encuentre los productos escalares entre dichos estados.

3. Repita todo para 2D grados de libertad $\left\{q^i, p_i, i = 1, \ldots, D\right\}$.
4. Considere el problema del oscilador armónico identificando ω con su frecuencia. Exprese el hamiltoniano en términos de los operadores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{a}^\dagger$, y halle sus autofunciones y autovalores.

Problema 4. Cuadraturas y proyección a dimensión finita

1. Muestre que en dimensión finita, $\mathrm{Tr}[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = 0$ para cualquier par de operadores $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$.
2. Concluya entonces que no existen representaciones finitas para el álgebra canónica definida por $[\mathbf{X}, \mathbf{P}] = \mathbf{i}\hbar$.
3. Considere ahora los operadores $\tilde{\mathbf{X}} = \Pi\mathbf{X}\Pi$, $\tilde{\mathbf{P}} = \Pi\mathbf{P}\Pi$, con $\Pi^2 = \Pi$ un *operador proyector* que proyecta a estos operadores en un subespacio de dimensión finita. ¿A qué es igual $[\tilde{\mathbf{X}}, \tilde{\mathbf{P}}]$?.
4. Determine las representaciones matriciales para $\tilde{\mathbf{X}}$ y $\tilde{\mathbf{P}}$ en el caso de que Π proyecte sobre el subespacio generado por los primeros cuatro modos de un oscilador armónico de frecuencia ω y masa m. Tip: Aproveche las expresiones algebráicas de los operadores en términos de los operadores de subida y bajada construídos en el problema anterior.
5. Diagonalize $\tilde{\mathbf{X}}$ y $\tilde{\mathbf{P}}$ y encuentre sus correspondientes autovalores y autoestados.
6. Encuentre el espectro de $\tilde{H} = \frac{1}{2m}\tilde{\mathbf{P}}^2 + \frac{m\omega^2}{2}\tilde{\mathbf{X}}^2$.

Problema 5. Considere un oscilador armónico simple unidimensional. Algebráicamente, o sea, sin usar funciones de onda,

1. Construya una combinación lineal de $|0\rangle$ y $|1\rangle$ tal que $\langle x\rangle$ sea máximo.
2. Suponga que el oscilador está en el estado construido en a) a $t = 0$. ¿Cuál es el vector de estado para $t > 0$ en el esquema de Schrödinger? Evalue $\langle x\rangle$ como función del tiempo para $t > 0$ usando (i) el esquema de Schrödinger y (ii) el equema de Heisenberg.
3. Muestre que $\langle 0|\, e^{ik\mathbf{x}}\, |0\rangle = e^{-\frac{k^2}{2}\langle 0|\mathbf{x}^2|0\rangle}$
4. Calcule la función de correlación definida por $C(t) = \langle x(t)\, x(0)\rangle$, donde $x(t)$ es el operador de posición en el esquema de Heisenberg, y evalue $C(t)$ explícitamente para el estado fundamental.

Problema 6. Un estado coherente de un oscilador armónico unidimensional simple es definido como un autoestado del operador (no hemítico) de aniquilación $\mathbf{a}$:

$$\mathbf{a}\,|\lambda\rangle = \lambda\,|\lambda\rangle \ ,$$

donde λ es, en general, un número complejo.

1. Pruebe que $|\lambda\rangle = e^{-\frac{|\lambda|^2}{2}} e^{\lambda\mathbf{a}^\dagger}\,|0\rangle$ es un estado coherente normalizado.
2. Pruebe la relación de incerteza mínima para tal estado.
3. Escriba $|\lambda\rangle$ como $|\lambda\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)\,|n\rangle$. Muestre que la distribución de $|f(n)|^2$ es del tipo Poisson. Encuentre el valor más probable de n, y de aquí, el de E.
4. Muestre que un estado coherente puede también obtenerse aplicando el operador de traslación $e^{\frac{i}{\hbar}\,z\,\mathbf{p}}$ al estado fundamental. Con la definición del problema anterior, ¿A qué λ corresponde?

Problema 7. Representación de Schwinger

Sean los operadores

$$\mathbf{J}_\pm = \hbar\,\mathbf{a}_\pm^\dagger\,\mathbf{a}_\mp \ , \quad \mathbf{J}_3 = \frac{\hbar}{2}\left(\mathbf{a}_+^\dagger\,\mathbf{a}_+ - \mathbf{a}_-^\dagger\,\mathbf{a}_-\right) \ , \quad \mathbf{N} = \mathbf{a}_+^\dagger\,\mathbf{a}_+ + \mathbf{a}_-^\dagger\,\mathbf{a}_- \ ,$$

donde $\mathbf{a}_\pm$ y $\mathbf{a}_\pm^\dagger$ son los operadores de aniquilación y destrucción de dos osciladores armónicos simples independientes.

1. Obtenga una expresión simple en términos de $\hat{N}$ del operador

$$\hat{\mathbf{J}}^2 = \mathbf{J}_3^2 + \frac{1}{2}\left(\mathbf{J}_+\mathbf{J}_- + \mathbf{J}_-\mathbf{J}_+\right).$$

   Pruebe las siguientes relaciones de conmutación:

$$[\mathbf{J}_3, \mathbf{J}_\pm] = \pm\hbar\mathbf{J}_\pm\ , \quad [\mathbf{J}_+, \mathbf{J}_-] = 2\hbar\hat{\mathbf{J}}_3\ , \quad \left[\hat{\mathbf{J}}^2, \mathbf{J}_3\right] = 0\ ,$$

2. Discuta el origen físico de esta álgebra en el problema.

Problema 8. Momento angular y simetría de rotaciones. Sea $\vec{\mathbf{L}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}}$ el momento angular de un sistema con hamiltoniano $\mathbf{H} = \frac{\vec{\mathbf{p}}^2}{2m} + V(\vec{r})$. Demostrar que:

$$[\mathbf{L}_i, \mathbf{r}_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}\ \mathbf{r}_k \quad , \quad [\mathbf{L}_i, \mathbf{p}_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}\ \mathbf{p}_k$$
$$\left[\mathbf{L}_i, \mathbf{p}^2\right] = \left[\mathbf{L}_i, \mathbf{r}^2\right] = [\mathbf{L}_i, \vec{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathbf{p}}] = 0$$

Qué condición debe satisfacer el potencial para que $\vec{\mathbf{L}}$ sea una constante de movimiento, esto es, $[\mathbf{H}, \vec{\mathbf{L}}] = 0$?

Problema 9. Momento angular y rotaciones

a) Escriba las componentes del operador $\vec{\mathbf{L}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}}$ en coordenadas esféricas.

b) Muestre que el operador que define una rotación de en un ángulo θ respecto a un eje $\check{n}$, puede escribirse como $\mathcal{R}_{\check{n}}(\theta) = e^{\mathbf{i}\theta\vec{\mathbf{L}}\cdot\check{n}/\hbar}$, y que resulta una operación unitaria.

c) Probar que si $\mathbf{S}$ es un operador invariante ante rotaciones, $[\vec{\mathbf{L}}, \mathbf{S}] = 0$.

d) Usando el resultado anterior, mostrar que si tres operadores $\mathbf{A}_{i=\{x,y,z\}}$ son las componentes de un vector, $[\mathbf{L}_i, \mathbf{A}_j,] = \mathbf{i}\hbar\epsilon_{ijk}\mathbf{A}_k$

Problema 10. Vector de Laplace-Runge-Lenz (LRL) Considerar $V(\vec{r}) = -\frac{e^2}{r^n}$.

Siendo el operador de LRL generalizado $\vec{\mathbf{R}} = \frac{1}{2m}\left(\vec{\mathbf{p}} \times \vec{\mathbf{L}} - \vec{\mathbf{L}} \times \vec{\mathbf{p}}\right) - e^2\check{\mathbf{r}}$, probar que $[\mathbf{H}, \vec{\mathbf{R}}] = 0$ si y sólo si $n = 1$ (potencial Coulombiano). En dicho caso probar las siguientes relaciones

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}^2 &= e^4 + \frac{2}{m}\,\mathbf{H}\,(\mathbf{L}^2 + \hbar^2) \\
[\mathbf{L}_i, \mathbf{R}_j] &= \mathbf{i}\hbar\ \epsilon_{ijk}\ \mathbf{R}_k \\
[\mathbf{R}_i, \mathbf{R}_j] &= \mathbf{i}\hbar\frac{(-2)}{m}\ \mathbf{H}\ \epsilon_{ijk}\ \mathbf{L}_k \\
\vec{\mathbf{L}} \cdot \vec{\mathbf{R}} &= \vec{\mathbf{R}} \cdot \vec{\mathbf{L}} = 0
\end{aligned}$$

NB 1: Notar que la expresión $\vec{\mathbf{p}} \times \vec{\mathbf{L}} - \vec{\mathbf{L}} \times \vec{\mathbf{p}}$ se elige para que el vector de Runge-Lenz a nivel cuántico resulte hermítico.

NB 2: El álgebra que generan $\mathbf{H}$, $\vec{\mathbf{L}}$ y $\vec{\mathbf{R}}$ es isomorfa a $SO(4)$, estando $\mathbf{H}$ relacionado con el *Casimir* asociado a ese álgebra. Con estos resultados, W. Pauli pudo derivar el espectro del átomo hidrogenoide por medios algebráicos, antes del desarrollo de la ecuación de Schrödinger. Para el estudiante interesado, ver la versión de S. Weinberg de este desarrollo:`http://www.fisica.unlp.edu.ar/materias/mecanica-cuantica-i/practicas-2018/lrlhatom.pdf`)