Mecánica Cuántica I

Año 2019

Prof: Alejandro Mariano — JTP: Mauricio Matera – Ay. Dipl: Mariela Nieto

Práctica 4 — Métodos algebráicos

Problema 1. Identidades útiles Probar las siguientes igualdades:

1. $[\mathbf{A}, \mathbf{BC}] = [\mathbf{A}, \mathbf{B}]\mathbf{C} + \mathbf{B}[\mathbf{A}, \mathbf{C}]$ (regla de Leibniz)
2. $[\mathbf{A}, [\mathbf{B}, \mathbf{C}]] + [\mathbf{B}, [\mathbf{C}, \mathbf{A}]] + [\mathbf{C}, [\mathbf{A}, \mathbf{B}]] = 0$ (identidad de Jacobi)
3. $[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = [\mathbf{B}^\dagger, \mathbf{A}^\dagger]^\dagger$
4. $[\mathbf{AB}, \mathbf{CD}] = -\mathbf{AC}\{\mathbf{D}, \mathbf{B}\} + \mathbf{A}\{\mathbf{C}, \mathbf{B}\}\mathbf{D} - \mathbf{C}\{\mathbf{A}, \mathbf{D}\}\mathbf{B} + \{\mathbf{C}, \mathbf{A}\}\mathbf{BD}$

Problema 2. Operadores Normales Se define a los *Operadores Normales* como aquellos operadores $\mathbf{A}$ que satisfacen $[\mathbf{A}, \mathbf{A}^\dagger] = 0$. Muestre que todo operador normal es diagonal en alguna base ortonormal.

Problema 3. Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ dos observables. Suponga que los autoestados simultáneos de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$, $\{|a; b\rangle\}$, forman una base completa ortonormal del espacio de representación. ¿Puede concluirse que $[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = 0$?.

Problema 4. Paridad Sea $\chi_E(x)$ una autofunción del Hamiltoniano de Schrödinger unidimensional, con autoenergía E; mostrar que si el potencial es una función par $V(x) = V(-x)$, entonces $\chi_E(-x)$ también es una autofunción del Hamiltoniano con el mismo autovalor de energía.

Corolarios:

- O bien i) $\chi_E(x)$ y $\chi_E(-x)$ son linealmente independientes (estado de energía E doblemente degenerado), y por lo tanto pudiéndose elegir entonces combinaciones lineales pares e impares.
- O bien ii) $\chi_E(x)$ y $\chi_E(-x)$ son proporcionales, en cuyo caso mostrar que la constante de proporcionalidad es ± 1. Luego, $\chi_E(x)$ es o par o impar.

Problema 5. Considerar un sistema físico de tres estados, con base ortonormal $\{|u_i\rangle, i = 1; 2; 3\}$. En esta base el hamiltoniano $\mathbf{H}$ y los observables $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ están representados por las siguientes matrices

$$\mathbf{H} = E_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \mathbf{i} \\ 0 & -\mathbf{i} & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = b \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Hallar $[\mathbf{H}, \mathbf{A}]$, $[\mathbf{H}, \mathbf{B}]$, $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$.
2. Encontrar una base ortonormal $\{|w_i\rangle, i = 1; 2; 3\}$ en la cual $\mathbf{A}$ y $\mathbf{H}$ sean diagonales simultáneamente. Expresar los observables $\mathbf{H}$, $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ en la nueva base.
3. Si el sistema se encuentra en el estado
$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|u_1\rangle + \frac{1}{2}|u_2\rangle + \frac{1}{2}|u_3\rangle$$
‘?qué valores de energía pueden obtenerse en una medición de $\mathbf{H}$ y con qué probabilidades?. Hallar el valor medio del Hamiltoniano en ese estado.
4. Si en vez de medir $\mathbf{H}$ se mide $\mathbf{A}$, ¿qué resultados pueden obtenerse y con qué probabilidad? y si se mide $\mathbf{B}$? Hallar los correspondientes valores medios.

5. Si al medir $\mathbf{H}$ sobre el estado se obtuvo $E = 2E_0$ ¿Qué resultados y con qué probabilidad se pueden obtener para una medida posterior de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$?

Problema 6. Notación de Dirac Usando las reglas del álgebra de bra-kets,

1. Dado $\mathbf{X} = |\beta\rangle\langle\alpha|$, hallar $\mathbf{X}^\dagger$.
2. Probar que $\langle\alpha|\mathbf{X}|\beta\rangle = \langle\beta|\mathbf{X}^\dagger|\alpha\rangle^*$
3. Mostrar que $(\mathbf{YZ})^\dagger = \mathbf{Z}^\dagger\mathbf{Y}^\dagger$.
4. Sean $\{|\phi_i\rangle\}$, $\{|\xi_i\rangle\}$ dos bases ortonormales. Muestre que existe un operador unitario $\mathbf{U}$ tal que $\mathbf{U}|\phi_i\rangle = |\xi_i\rangle$. Dé la expansión de $\mathbf{U}$ en notación de Dirac.

Problema 7. En un cierto instante, una partícula en un pozo infinito está descripta por la función de onda

$$\psi(x) = \frac{\cos(\pi x/(2a))}{\sqrt{2a}} + \frac{\mathbf{i}\sin(\pi x/(a))}{2\sqrt{a}} + \frac{\cos(3\pi x/(2a))}{2\sqrt{a}}$$

con $-a < x < a$.

1. ¿Cuál es la probabilidad de encontrar a la partícula en cada uno de sus estados estacionarios?
2. ¿Qué valores puede tomar una medida de la energía, y con qué probabilidades?
3. ¿Qué valores de impulso se pueden medir y con qué probabilidades?

Problema 8. Oscilador armónico III Considere un oscilador armónico unidimensional en el estado

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{2}|1\rangle + \frac{\mathbf{i}}{2}|2\rangle$$

1. Calcular los valores de expectación de $\mathbf{x}$, $\mathbf{p}$, $\mathbf{H}$.
2. Calcular la dispersión de $\mathbf{H}$.
3. ¿Qué valores de energía se pueden observar y con qué probabilidades?

Problema 9. Correlaciones Si dos variables clásicas x, y (compatibles) están descriptas por una distribución de probabilidad conjunta $p(x, y)$, se define la *correlación* entre ambas variables como $C(x, y) = \langle xy\rangle - \langle x\rangle\langle y\rangle$, que se anula si $p(x, y) = p_x(x)p_y(y)$. Una generalización posible para sistemas de observables no compatibles viene dada por

$$C[\mathbf{x}, \mathbf{p}] = \langle\frac{\mathbf{xp} + \mathbf{px}}{2}\rangle - \langle\mathbf{x}\rangle\langle\mathbf{p}\rangle$$

1. Considere el estado del problema anterior. Determine el valor de la correlación entre $\mathbf{x}$ y $\mathbf{p}$ para ese estado.
2. Discuta si puede entenderse este resultado en términos de una distribución de probabilidad conjunta.

Problema 10. Sistemas compuestos Sea $\mathcal{H}^{AB} = \mathcal{H}^A \otimes \mathcal{H}^B$ un espacio de Hilbert producto tensorial y $|\psi_0\rangle = |\phi\rangle_A|\varphi\rangle_B$ es el estado inicial del sistema. a) Muestre que si la evolución del sistema está gobernada por un Hamiltoniano $\mathbf{H}_0^{AB} = \mathbf{H}^A \otimes \mathbf{1}^B + \mathbf{1}^A \otimes \mathbf{H}^B$, el estado del sistema a tiempo t será de la forma

$$|\psi(t)\rangle = |\phi(t)\rangle_A|\varphi(t)\rangle_B$$

con

$$\mathbf{i}\frac{d}{dt}|\phi(t)\rangle_A = \mathbf{H}^A|\phi(t)\rangle_A \quad \text{y} \quad \mathbf{i}\frac{d}{dt}|\varphi(t)\rangle_B = \mathbf{H}^B|\varphi(t)\rangle_B$$

b) Dados dos observables $\mathbf{O}_A^{AB}\mathbf{O}_A^{AB} \equiv \mathbf{O}_A \otimes \mathbf{1}_B$ y $\mathbf{O}_B^{AB} \equiv \mathbf{1}_A \otimes \mathbf{O}_B$, pruebe que

1. $[\mathbf{O}_A^{AB}, \mathbf{O}_B^{AB}] = 0$,

2. $\langle \psi(t)|\mathbf{O}_A^{AB}|\psi(t)\rangle = \langle \phi(t)|\mathbf{O}_A|\phi(t)\rangle_A$,

3. $\langle \psi(t)|\mathbf{O}_A^{AB}\mathbf{O}_B^{AB}|\psi(t)\rangle = \langle \phi(t)|\mathbf{O}_A|\phi(t)\rangle_A \langle \varphi(t)|\mathbf{O}_B|\varphi(t)\rangle_B$.

4. $C[\mathbf{O}_A^{AB}, \mathbf{O}_B^{AB}] = 0$.

c) Considere ahora un Hamiltoniano de la forma $\mathbf{H}^{AB} = \mathbf{H}_0^{AB} + \lambda \mathbf{O}_A \mathbf{O}_B$. ¿Cómo se modifican los resultados anteriores?

Problema 11. Operadores Proyección. Los operadores de Proyección ortogonal satisfacen $\mathbf{P} = \mathbf{P}^2 = \mathbf{P}^\dagger$ a) Muestre que sus autovalores $\in \{0, 1\}$. b) La traza de un operador proyección ortogonal es igual a su rango. c) Muestre que en general, el producto de dos proyectores ortogonales no es otro proyector ortogonal. ¿qué condición deben cumplir dos proyectores ortogonales para que su producto también lo sea?

Problema 12. Operadores autoadjuntos no acotados Considere el operador $\mathbf{W} = -\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial^2 r} r$ en el espacio de funciones continuas $L_+^2 = \{\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathcal{C} / \int_0^\infty |\psi(r)|^2 r^2 dr < \infty\}$ respecto al producto escalar definido por $(\varphi, \psi) = \int_0^\infty \varphi^*(r)\psi(r) r^2 dr$. Determinte qué condición extra debemos imponer a L_+^2 para que W sea autoadjunto.

Problema 13. Identidad BHC Dados dos operadores $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$, probar que

1. $e^{\mathbf{A}}\mathbf{B}e^{-\mathbf{A}} = \mathbf{B} + [\mathbf{A}, \mathbf{B}] + \frac{[\mathbf{A},[\mathbf{A},\mathbf{B}]]}{2!} + \ldots = e^{[\mathbf{A},\cdot]}\mathbf{B}$

2. Si t es un parámetro real,
$$\frac{de^{\mathbf{A}t}}{dt} = \mathbf{A}e^{t\mathbf{A}} = e^{t\mathbf{A}}\mathbf{A}$$

3. Si $[\mathbf{A}, [\mathbf{A}, \mathbf{B}]] = [\mathbf{B}, [\mathbf{A}, \mathbf{B}]] = \mathbf{0}$,
$$e^{\mathbf{A}}e^{\mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}+\frac{1}{2}[\mathbf{A},\mathbf{B}]} = e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}}e^{\frac{1}{2}[\mathbf{A},\mathbf{B}]}$$