Mecánica Cuántica I

Año 2019

Prof: Alejandro Mariano — JTP: Mauricio Matera – Ay. Dipl: Mariela Nieto

Práctica 3 — La aproximación semiclásica

Problema 1. Una partícula en 1d ($-\infty < x < \infty$) está sujeta a una fuerza constante derivable del potencial $V(x) = -\lambda x$ con $\lambda > 0$.

1. Determine si el espectro de energías continuo o discreto.
2. Resolver el problema exactamente.
3. Escribir la ecuación de onda correspondiente a la energía E, y dar una expresión WKB aproximada de la(s) solución(es) de la misma.
4. Repitir lo anterior para el caso $V(x) = -\lambda|x|$ ($\lambda > 0$).

Problema 2. Fórmulas de conexión Hacer un cuadro completo con las fórmulas de conexión de la aproximación WKB entre pares de soluciones linealmente independientes de energía E a izquierda y derecha de un punto de retorno, en los dos casos posibles de pendiente positiva y negativa del potencial, e indique las condiciones de validez.

Problema 3. Determinar en la aproximación WKB los niveles de energía discretos de una partícula en los siguientes potenciales:

1. $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$
2. $V(x) = -\frac{-V_0}{\cosh^2(x/a)}$

y comparar con los resultados exactos.

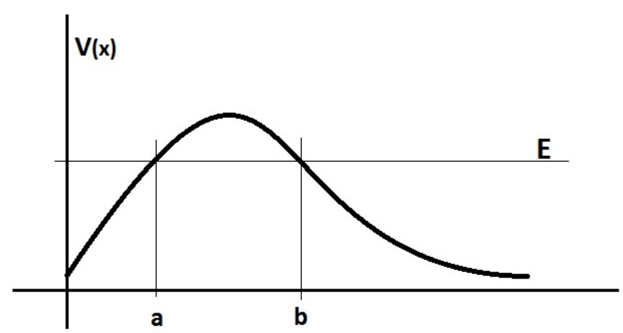
Problema 4. Considere una partícula de masa M en presencia de un potencial de la forma

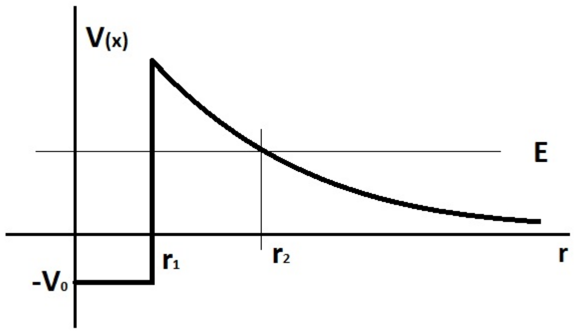
$$V_{\alpha,\lambda}(x) = \begin{cases} -\frac{\alpha\hbar^2}{2Ma^2}(1 - (|x|/a)^\lambda) & |x| < a \\ 0 & |x| > a \end{cases}$$

con λ y α dos parámetros, y discuta la validez de la aproximación WKB para encontrar a) el número de estados ligados b) la energía del estado fundamental y c) la correspondiente función de onda.

Problema 5. Mostrar que en la aproximación WKB el coeficiente de transmisión para una partícula de masa m y energía E a través de la barrera de potencial de la figura está dado por la expresión

$$T = e^{-2L}\left(1 + \frac{e^{-2L}}{4}\right)^{-2} \quad , \quad L = \int_a^b \sqrt{\frac{2m}{\hbar}(V(x) - E)}dx$$





Problema 6. La desintegración de una partícula alfa (núcleo de He) puede modelarse por efecto tunel usando el siguiente potencial

$$V(x) = \begin{cases} -V_0 & r < r_0 \\ \frac{2Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r} & r > r_0 \end{cases}$$

Usando el resultado anterior, calcule la probabilidad por unidad de tiempo de que una partícula alfa escape del núcleo.

Problema 7. Mediante el método WKB, determine los estados estacionarios de una partícula sujeta a los potenciales

1. $V(x) = -V_0 e^{-|x|/a}$.
2. $V(x) = -V_0 e^{-\frac{x^2}{2a^2}}$.

Para ambos casos, utilize esta aproximación para determinar la densidad de estados y el número de estados ligados.

Problema 8. Funciones de Bessel y WKB En el último problema de la práctica anterior, encontramos que los estados estacionarios de una partícula en un pozo *esférico* eran de la forma $\psi_E(\vec{r}) = j_l(kr)Y_l^m(\check{r})$, donde $j_l(u)$ es la *función de Bessel esférica de orden* l, que satisface la ecuación diferencial

$$-\frac{1}{u}\frac{\partial^2}{\partial u^2} u j_l(u) + \frac{l(l+1)}{u^2} j_l(u) = j_l(u)$$

a) Escriba las expresiones asintóticas para j_l en los casos $l = 0$, $l = 1$ y $l \gg 1$ en los límites $u \to 0$ y $u \to \infty$. b) Obtenga las soluciones aproximadas por el método WKB para estos casos y compare.