Mecánica Cuántica I

Año 2019

Prof: Alejandro Mariano — JTP: Mauricio Matera – Ay. Dipl: Mariela Nieto

Práctica 2 — La ecuación de Schrödinger Estacionaria

Propiedades y Soluciones analíticas en 1 y 3 dimensiones

Problema 1. Propiedades de la ec. de Schrödinger 1D estacionaria a) Mostrar que en problemas unidimensionales los estados ligados son no degenerados. b) Mostrar que el resultado anterior es valido también si el movimiento está clásicamente prohibido sólo en uno de los extremos de R. c) Usando el resultado del item (a) mostrar que las autofunciones correspondientes a estados ligados unidimensionales son reales módulo una fase independiente de x.

Problema 2. Muestre que el conjunto de las autofunciones de una partícula en un pozo de potencial infinito $V(x) = \begin{cases} 0 & |x| < a \\ \infty & |x| > a \end{cases}$ es ortogonal respecto al producto escalar

$$\langle f|g\rangle = \int_{-a}^{a} f(x)^* g(x) dx$$

Problema 3. Encontrar las autofunciones y la ecuación trascendente que determina las autoenergías de los estados ligados de una partícula en el pozo de potencial asimétrico dado por

$$V(x) = V_1\Theta(-x) + V_2\Theta(x-a)$$

donde $\Theta(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$ es la *Función* Θ *de Heaviside*. Asuma que $V_1 > V_2 > 0$.

Problema 4. Encontrar los estados estacionarios y sus energías correspondientes para una partícula en un potencial de la forma

$$V(x) = \frac{-V_0}{\cosh^2(x/a)}$$

Ayuda: ver libro de Landau

Problema 5. Oscilador Armónico Considere un oscilador armónico unidimensional en el estado de número cuántico n,

1. Mostrar que su energía puede escribirse como $E_n = m\omega^2\langle \mathbf{x}^2\rangle_n$. Comparar con el resultado clásico.
2. Calcule las dispersiones de $\mathbf{x}$ y $\mathbf{p}$.

Problema 6. Oscilador Armónico II Considere una partícula de masa m sujeta a un potencial unidimensional de la siguiente forma:

$$\Theta(x) = \begin{cases} \frac{k}{2}x^2 & x \leq 0 \\ \infty & x < 0 \end{cases}$$

1. ¿Cuál es la energía del estado fundamental?
2. ¿Cuál es el valor de expectación $\langle x^2\rangle$ en dicho estado?

Problema 7. Pseudo-Potencial Considere una partícula de masa m en una dimensión ligada a un centro fijo por un potencial de la forma

$$V(x) = -\frac{\hbar^2}{m a_0}\delta(x)\ , a_0 > 0$$

donde $\delta(x)$ es la *distribución delta de Dirac*, que satisface $\delta(x) = 0$ si $x \neq 0$ y $\int \delta(x)dx = 1$.

1. Encuentre la función de onda y energía de ligadura del estado fundamental. ¿Existen estados estacionarios exitados ?

2. Muestre que este resultado es consistente con tomar el límite $a \to 0$ en el caso del potencial del problema 5, con $V_0 = \frac{\hbar^2}{2ma_0 a}$.

Problema 8. Potencial doble Considere una partícula de masa m en presencia del potencial definido por $V(x) = -\frac{\hbar^2}{2ma_0}(\delta(x - L/2) + \delta(x + L/2))$. a) Determine su espectro y estados estacionarios. b) Qué ocurre en el límite en que $a_0/L \gg 1$? ¿y si $a_0/L \ll 1$?

Problema 9. Potencial periódico I a) Muestre que en un potencial periódico en una dimensión, los autoestados correspondientes a estados ligados satisfacen la condición $\psi_E(x + L) = e^{\mathbf{i}\phi}\psi_E(x)$. b) Considere el caso $V(x) = V_0\,\Theta(\cos(2\pi/Lx))$. Determine su espectro y estados estacionarios.

Problema 10. Potencial periódico II Considere el potencial “peine”

$$V(x) = -\frac{\hbar^2 L}{2\pi M a_0}\delta(\sin(\pi x/L))\ .$$

a) Determine su espectro y estados estacionarios. Discuta los casos límite $a_0/L \gg 1$ y $a_0/L \ll 1$.

Problema 11. Potenciales tridimensionales I

1. Mostrar que para $V(\vec{r}) = V_1(x) + V_2(y) + V_3(z)$, la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo admite soluciones de la forma $\Psi(\vec{r}) = \psi_1(x)\psi_2(y)\psi_3(z)$. ¿Cuál es la energía del estado Ψ? ¿Cuál es la solución general para estados estacionarios? ¿Y para no estacionarios?.

2. Resolver la ecuación de Schrödinger tridimensional para un potencial de la forma

$$V(x) = \begin{cases} 0 & 0 < \max(x, y, z) < L \\ \infty & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

   Estudiar la degeneración de los primeros niveles.

Problema 12. Potenciales tridimensionales II Considere una partícula moviendose en un *potencial central* $V(\vec{r}) = V(r)$.

1. Escriba la correspondiente ecuación de Schrödinger estacionaria en coordenadas esféricas.

2. Mostrar que esta admite soluciones de la forma $\Psi(\vec{r}) = \frac{R_l(r)}{r}Y_l^m(\check{r})$ donde $Y_l^m(\check{r})$ son los llamados *Armónicos esféricos* y $R(r)$ es una solución de la ecuación de Schrödinger estacionaria *unidimensional* con un potencial *efectivo* de la forma $V_{eff}(r) = V(r) + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2}$.

3. Resolver la ecuación de Schrödinger tridimensional estacionaria para los primeros tres niveles de energía de un potencial de la forma

$$V(r) = \begin{cases} 0 & 0 < r < a \\ \infty & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

   Estudiar la degeneración de los primeros niveles.