Mecánica Cuántica I

Año 2019

Prof: Alejandro Mariano — JTP: Mauricio Matera – Ay. Dipl: Mariela Nieto

Práctica 6 — Momento angular

variables de espín

Ecuación de Schrödinger con simetría esférica

Problema 1. Autofunciones de la partícula libre con simetría esférica

1. Estudiar la ecuación de Schrödinger de una partícula libre como un problema de potencial central. Hallar las autofunciones radiales.

2. Relacionar el conjunto de autofunciones del problema libre con las autofunciones de $\{p_x, p_y, p_z\}$. Expresar en particular el desarrollo de la onda plana $\exp(ikz)$ en armónicos esféricos.

Problema 2. Autofunciones de la partícula en un potencial central

1. Dé la forma general de las autofunciones del Hamiltoniano de una partícula de masa m en presencia de un potencial central $V(r)$. ¿Coómo se relacionan con las soluciones del problema libre?

2. Usando el teorema de adición de los armónicos esféricos, exprese la autofunción del Hamiltoniano correspondiente a energía $E > 0$, con $\mathbf{L}^2$ y $\check{n} \cdot \vec{\mathbf{L}}$ definido, en términos de las autofunciones con $\mathbf{L}_z$ definido.

3. Si el potencial tiene rango finito ($V(r) \approx 0$ si $r > r_0$) dé la expresión general para las autofunciones de $\mathbf{H}$ en la región $r > r_0$.

Problema 3. Un sistema está descripto por la siguiente función de onda

$$\Psi(x, y, z) = \mathcal{N} \times (x + y + z) \exp\left(-\frac{x^2 + y^2 + z^2}{\alpha^2}\right),$$

con α real. Se miden $\mathbf{L}^2$ y $\mathbf{L}_z$ simultáneamente sobre el sistema. Evaluar la constante de normalización $\mathcal{N}$. Indicar la probabilidad de medir los distintos valores posibles de $\mathbf{L}^2$ y $\mathbf{L}_z$. Calcular el valor de expectación de dichos operadores.

Problema 4. Considerar un estado con impulso angular orbital $l = 1$ en un autoestado de $\mathbf{L}_x$ con autovalor $\hbar$.

1. Expresar la autofunción correspondiente en términos de armónicos esféricos $Y_l^m(\theta, \phi)$.

2. Calcular el valor medio de $\mathbf{L}_z$ y la dispersión $\Delta\mathbf{L}_z$ en ese estado.

Problema 5. Considerar el átomo de hidrógeno en su estado fundamental.

1. Calcular la probabilidad que el electrón se encuentre a una distancia del núcleo mayor que la clásicamente permitida.

2. Mostrar que se satisace el principio de incerteza relacionado con las variables x y p_x.

3. Dibujar las regiones del plano (x, z) donde la probabilidad de encontrar al electrón es alta. Idem para los estados $2S$, $2P$, $m = 0$ y $2P$, $m = 1$.

4. Calcular todos los elementos de matriz no nulos de $\hat{x}$ entre los estados $n = 2$ y fundamental del átomo de hidrógeno.

Álgebra de momentos angulares

Problema 6.

1. Mostrar a partir del álgebra de momentos angulares que
$$\mathbf{L}_{\pm}\,|l,m\rangle = \hbar\sqrt{l(l+1)-m(m\pm1)}\;\;|l,m\pm1\rangle$$
donde $|l,m\rangle$ son ortonormales y $\mathbf{L}_{+} = \mathbf{L}_{-}^{\dagger} = \mathbf{L}_x + \mathbf{i}\mathbf{L}_y$.

2. Construir las matrices de $\vec{\mathbf{L}}$, $\mathbf{L}_{+}$, $\mathbf{L}_{-}$ y $\mathbf{L}^2$ en los espacios propios de $\mathbf{L}^2$ con $l=0$, $l=1$ y $l=2$.

3. Mostrar que el operador paridad $\mathbf{P}$ (ante inversión respecto del origen) conmuta con $\vec{\mathbf{L}}$.

4. A partir de este último resultado mostrar que los armónicos esféricos pueden ser elegidos con paridad definida.

5. Construya las matrices $\mathcal{R}_l(\Theta) = \langle lm|\mathcal{R}_y(\theta)|lm^{'}\rangle$ donde $\mathcal{R}_y(\theta)$ es el operador asociado a una rotación en un ángulo θ alrededor del eje y para los casos $l=0$, $l=1$ y $l=2$.

Problema 7. Usando la relación $[\mathbf{L}_x,\mathbf{L}_y] = \mathbf{i}\hbar\mathbf{L}_z$ y sus permutaciones cíclicas, satisfechas por el operador momento angular, mostrar que $[\mathbf{L}_z,\vec{\mathbf{L}}^{\,2}] = 0$, donde $\vec{\mathbf{L}}^{\,2} = \mathbf{L}_x^2 + \mathbf{L}_y^2 + \mathbf{L}_z^2$, mostrando entonces que las autofunciones de $\mathbf{L}_z$ con autovalor $m\hbar$ pueden ser elegidas para ser también autofunciones de $\vec{\mathbf{L}}^{\,2}$.

Mostrar que el valor de expectación $\langle[\mathbf{L}_z,\mathbf{L}_x\mathbf{L}_y]\rangle$ se anula para cualquier autoestado de $\mathbf{L}_z$. Luego, mostrar evaluando $[\mathbf{L}_3,\mathbf{L}_x\mathbf{L}_y]$, que $\langle\mathbf{L}_x^2\rangle = \langle\mathbf{L}_y^2\rangle$ para todo autoestado de $\mathbf{L}_3$. Dado el estado para el cual $\mathbf{L}_z$ tiene autoestado $m\hbar$ y $\vec{\mathbf{L}}^{\,2}$ autoestado $\ell(\ell+1)\hbar^2$, mostrar que $\langle\mathbf{L}_x^2\rangle = \frac{1}{2}\hbar^2(\ell(\ell+1)-m^2)$.

Spin

Problema 8. Considere un sistema de spin $\frac{1}{2}$ con $|\pm\rangle \equiv \left|s_z = \pm\frac{\hbar}{2}\right\rangle$ ortonormales. Sean los operadores $\mathbf{S}_i = \frac{\hbar}{2}\sigma_i$ con $\sigma_{i=x,y,z}$ las *matrices de Pauli*
$$\sigma_x = (|+\rangle\langle-| + |-\rangle\langle+|)\ ,\qquad \sigma_y = (-i\,|+\rangle\langle-| + i\,|-\rangle\langle+|)\ ,\qquad \sigma_z = (|+\rangle\langle+| - |-\rangle\langle-|)\ ,$$

1. Probar las relaciones de (anti)conmutación
$$[\mathbf{S}_i,\mathbf{S}_j] = \mathbf{i}\hbar\epsilon_{ijk}\mathbf{S}_k\ ,\qquad \{\mathbf{S}_i,\mathbf{S}_j\} = \frac{\hbar^2}{2}\delta_{ij}\ ,$$

2. Construir $\left|\vec{\mathbf{S}}\cdot\breve{n};\pm\right\rangle$ en la base $\{|\pm\rangle\}$, donde $\breve{n}$ es un versor arbitrario definido por ángulos azimutal α y polar β.

Problema 9. Dada una matriz compleja arbitraria X de $\mathbb{C}^{2\times2}$
$$X = a_0\,1 + \vec{\sigma}\cdot\vec{a}\ ,\ \ a_\mu\in\mathbb{C}\ ,$$

1. ¿Cómo se relacionan $\{a_\mu,\ \mu=0,1,2,3\}$ con $\mathrm{Tr}\,X$, $\mathrm{Tr}\,(\sigma_i X)$?

2. Obtenga a_ν en términos de los elementos de matriz $X_{\alpha\beta}$

3. ¿Qué restricción cumplen los a_μ si X es hermítica? ¿ y si es real? ¿ y si es unitaria?

Problema 10. Considerar una secuencia de rotaciones de Euler representada por
$$\begin{aligned}\mathcal{D}^{1/2}(\alpha,\beta,\gamma) &= exp\left(-i\frac{\alpha}{2}\sigma_3\right)exp\left(-i\frac{\beta}{2}\sigma_2\right)exp\left(-i\frac{\gamma}{2}\sigma_3\right)\\ &= \begin{pmatrix} e^{-i(\alpha+\gamma)/2}\cos\frac{\beta}{2} & -e^{-i(\alpha-\gamma)/2}\sin\frac{\beta}{2}\\ e^{i(\alpha-\gamma)/2}\sin\frac{\beta}{2} & e^{i(\alpha+\gamma)/2}\cos\frac{\beta}{2}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Debido a las propiedades de grupo de las rotaciones, esperamos que esta secuencia de operaciones sea equivalente a una única rotación de ángulo θ alrededor de algún eje $\hat{n}$. Hallar θ y $\hat{n}$.

Acoplamiento a campos magnéticos.

Problema 11. Un electrón se mueve en presencia de un campo magnético en la dirección z ($\vec{B} = B\check{z}$)

1. Evalue $[\Pi_i, \Pi_j]$, donde $\Pi_i = p_i - \frac{e}{c} A_i$.
2. Comparando el hamiltoniano y las relaciones de conmutación obtenidas con el problema del oscilador armónico muestre que los autovalores de energía pueden escribirse como $E_{k,n} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \frac{|e\,B|\hbar}{mc}\left(n + \frac{1}{2}\right)$, donde $\hbar k$ es el autovalor continuo de de p_z y n es un entero positivo. ¿Cómo es la degeneración de cada nivel n?

Problema 12. Aharonov-Bohm Considere una partícula de carga q confinada al interior de una capa cilíndrica hueca cuyo eje coincide con el eje z. Se requiere que la función de onda se anule en las paredes interna y externa ubicadas a $\rho = \rho_a$ y $\rho = \rho_b$ respectivamente, y en la parte inferior ($z = 0$) y superior ($z = L$).

1. Encuentre el espectro de energía y sus correspondientes autofunciones (tener en cuenta que habrá una contribución a los números cuánticos que quedará definido implícitamente en términos de una ecuación trascendental).
2. Repita el mismo problema cuando un campo magnético uniforme $\vec{B} = B\check{z}$ está presente en la región $0 < \rho < \rho_a$. Note que los autovalores de la energía se ven influenciados por el campo magnético, aunque los electrones no lo tocan (efecto Aharonov-Bohm). ¿Bajo qué condiciones queda inmutada la energía del estado fundamental?

Problema 13. Un chorro no polarizado de átomos de spin 1/2 pasa a través de una serie de experimentos de Stern-Gerlach que lo filtran de la siguiente manera:

- El primero descarta $s_n = -1/2$;
- El segundo descarta $s_z = -1/2$;
- El tercero acepta $s_n = -1/2$;

donde $s_n \equiv \check{n} \cdot \vec{s}$, y $\check{n}$ es un vector unitario en el plano xz que forma un angulo β con el eje z.

a) Qué porcentaje del chorro inicial se mide después del tercer filtro?

b) Para qué valor de β dicha intensidad es máxima?

c) Por qué un experimento de este tipo no se realiza con haces de electrones?

Problema 14. Considerar un sistema de spin 1/2 con hamiltoniano

$$\mathbf{H} = \omega \mathbf{S}_x$$

1. Encontrar los autoestados del mismo y sus correspondientes energías.
2. Hallar la probabilidad de que el sistema se encuentre en los autoestados de $\mathbf{S}_y$ a tiempo $t(> 0)$ sabiendo que se encontraba en un autoestado de $\mathbf{S}_z$ a $t = 0$.
3. Calcular en tal caso ΔS_x y ΔS_y como funciones del tiempo y verificar la relación de incerteza correspondiente.