

## 1. Operadores de creación y destrucción

- a) Muestre que un operador local de dos cuerpos, independiente del spin  $\sum_{i<j} V(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j)$  puede representarse en términos de los operadores de campo como

$$V = \frac{1}{2} \sum_{s,s'} \int d^3r d^3r' \psi^\dagger(\mathbf{r}, s) \psi^\dagger(\mathbf{r}', s') V(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}', s') \psi(\mathbf{r}, s).$$

Nótese el orden en caso de un sistema fermiónico. Expréselo también en términos del operador densidad  $\rho(\mathbf{r}) = \sum_i \delta(\mathbf{r}_i - \mathbf{r})$

- b) Escriba los operadores de energía cinética e impulso de un sistema de partículas en términos de los operadores de creación y aniquilación de estados de impulso definido. Haga lo mismo con un operador de dos cuerpos  $V = \sum_{i<j} V(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|)$ .
- c) A partir del desarrollo de un operador de un cuerpo  $F = \sum_{i,j} \langle i|F|j \rangle a_i^\dagger a_j$ , y de un operador de dos cuerpos  $V = \frac{1}{2} \sum_{i,j,k,l} \langle ij|V|kl \rangle a_i^\dagger a_j^\dagger a_l a_k$ , muestre que

$$\begin{aligned} \langle n_1 n_2 \dots | F | n_1 n_2 \rangle &= \sum_i n_i \langle i | F | i \rangle, \\ \langle n_1 n_2 \dots | V | n_1 n_2 \rangle &= \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} n_i n_j (\langle ij | V | ij \rangle \pm \langle ij | V | ji \rangle) + \frac{1}{2} \sum_i n_i (n_i - 1) \langle ii | V | ii \rangle, \end{aligned}$$

donde el signo + corresponde al sistema bosónico, el - a un sistema fermiónico, y  $n_i$  denota el número de ocupación del estado  $|i\rangle$  ( $n_i = 0, 1, \dots$  para bosones,  $n_i = 0, 1$  para fermiones). El último término es nulo en un sistema fermiónico.

2. Sea  $a_j^\dagger, a_j$  un conjunto de operadores de creación y aniquilación. *i)* Muestre que los operadores

$$b_k \equiv \sum_j D_{kj}^* a_j, \quad b_k^\dagger \equiv \sum_j D_{kj} a_j^\dagger,$$

satisfacen las correspondientes reglas de conmutación (o anticonmutación) si la matriz  $D$  es unitaria. *ii)* Exprese el operador de creación de estados de impulso definido  $a^\dagger(\mathbf{p})$  en términos de los operadores de campo  $a^\dagger(\mathbf{r})$ . Verifique que se cumple la propiedad anterior, extendida al caso continuo. *iii)* Muestre que los operadores

$$c_j = a_j^\dagger, \quad c_j^\dagger \equiv a_j,$$

satisfacen, en el caso fermiónico las mismas reglas de anticonmutación que los operadores  $a_j^\dagger, a_j$ , y pueden considerarse entonces operadores de aniquilación y creación fermiónicos. Interprete. ¿Sucede lo mismo en el caso bosónico?

3. Considere el Hamiltoniano de “ligadura fuerte” o “tight-binding” en una dimensión, que se utiliza para modelar el movimiento electrónico mediante saltos de un átomo a otro en un sólido cristalino

$$H_0 = -t \sum_{j=1}^L c_j^\dagger c_{j+1} + \text{h.c.},$$

con condiciones de contorno periódicas, lo cual implica identificar  $c_L \equiv c_1$ . Aquí  $t$  es la constante de *hopping* o salto de un electrón de un sitio a otro. *i)* Muestre que puede diagonalizarse por medio de una transformada de Fourier (inciso *b)*). *ii)* Considere el estado de vacío  $|0\rangle$  definido como aquel para el cual  $c_k^\dagger |0\rangle = 0, \forall k$  y muestre que todos los estados de la forma

$$|k_1 k_2 \dots k_n\rangle = c_{k_1}^\dagger c_{k_2}^\dagger \dots c_{k_n}^\dagger |0\rangle$$

son autoestados del Hamiltoniano. ¿Cuál es su energía? De este modo, haber llevado  $H_0$  a una forma diagonal en los operadores de creación y aniquilación implica haber hallado todos los autoestados y autoenergías. Discuta el estado fundamental. *iii*) Obtenga la dependencia temporal de los operadores que lo diagonalizan en la representación de Heisenberg. Calcule la función de correlación retardada de los electrones,

$$G_k(t) = \frac{1}{i\hbar} \theta(t) \langle F | [c_k(t), c_k^\dagger(0)] | F \rangle$$

y su transformada de Fourier  $G_k(\omega)$ . Obtenga explícitamente la parte imaginaria de  $G_k(\omega)$  (se denomina función espectral). Interprete.

4. Considere el modelo de Hubbard, definido por

$$H = -t \sum_{j=1, \sigma=\uparrow, \downarrow}^L c_{j, \sigma}^\dagger c_{j+1, \sigma} + \text{h.c.} + U \sum_j n_{j\uparrow} n_{j\downarrow},$$

que consiste en un modelo de tight-binding del ejercicio anterior (ahora incorporando el spin de los electrones) sumado a un término de interacción entre electrones cuando ocupan el mismo sitio de la red, siendo  $n_{j\sigma} = c_{j\sigma}^\dagger c_{j\sigma}$  el operador densidad de electrones. Implemente una transformación de partícula agujero:

$$\begin{aligned} h_{i\sigma} &= (-1)^i c_{i\sigma}^\dagger \\ h_{i\sigma}^\dagger &= (-1)^i c_{i\sigma} \end{aligned}$$

¿Es canónica? ¿Cómo debería cambiar el Hamiltoniano para que esta transformación fuera una simetría?

5. **Cuantización del campo electromagnético. Emisión espontánea**

Calcule la probabilidad de emisión espontánea de un fotón por parte de un electrón que se encuentra en el primer estado excitado de un átomo hidrogenoide. Analice la validez de la aproximación dipolar. Muestre que la probabilidad por unidad de tiempo es del orden de  $10^9$  fotones por segundo para la luz visible y  $10^{15}$  fotones por segundo para los rayos gama.

6. **(Opcional): Integral funcional**

Utilice la integral funcional para calcular la amplitud de transición  $\langle y | e^{-itH} | x \rangle$  para el oscilador armónico unidimensional  $H = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$ .