Mecánica Cuántica II

Prof. Fidel Schaposnik
JTP Aníbal Iucci

Práctica 5

Año 2014

1. **Ecuación de Lipman-Schwinger**

   a) Escriba la ecuación de Lipman-Schwinger para el caso unidimensional. Considere una onda incidente de la forma $\langle x|\phi\rangle = e^{ikx}/\sqrt{2\pi}$ y verifique que la función de Green es

   $$G_{\pm}(x,x') = \frac{e^{\pm ik|x-x'|}}{2ik}. \tag{1}$$

   b) Considere el potencial $V(x) = -\frac{\gamma\hbar^2}{2m}\delta(x)$, $\gamma > 0$. Aplique la ecuación anterior para hallar los coeficientes de transmisión y reflexión T y R.

   c) Encuentre los estados ligados del potencial anterior y verifique que los correspondientes valores de k (complejos) coinciden con los polos de T y R.

2. **Aproximación de Born**

   a) Muestre que en la aproximación de Born la sección eficaz diferencial correspondiente a la dispersión de partículas de masa m e impulso k por un potencial de Yukawa $V(r) := \frac{\beta}{r}\, e^{-\gamma\, r}$ está dada por

   $$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4m^2\beta^2}{\left(4k^2\sin^2(\theta/2) + \gamma^2\right)^2}$$

   A partir de este resultado, obtenga la sección eficaz de Rutherford.

   b) Encuentre la sección eficaz diferencial y total para los potenciales

   1) $V(r) = V_0\Theta(R-r)$.
   2) $V(r) = V_0 e^{-r^2/2R^2}$.

   Determine las condiciones de validez de las expresiones. Verifique que para $kR \ll 1$ la sección eficaz diferencial es isotrópica.

3. **Ondas parciales - Esfera rígida**

   a) Muestre que para un potencial de corto alcance, definido como aquel para el cual $\lim_{r\to\infty} rV(r) = 0$, la función de onda radial posee el siguiente comportamiento asintólico:

   $$R_l(r) \sim \frac{e^{i\delta_l(E)}}{kr}\sin\left[kr - l\pi/2 + \delta_l(E)\right]$$

   b) Considere la dispersión de partículas por una esfera rígida de radio R. Calcule el corrimiento de fase para cada momento angular. Considere el límite de altas (bajas) energías y muestre que la sección eficaz total es el doble (cuádruple) del área transversal de la esfera.

4. **Ondas parciales - Pozo de potencial esférico finito**

   a) Encuentre el valor del corrimiento de fase $\delta_0(k)$ y de la sección eficaz parcial $\sigma_0(k)$ en forma exacta para el potencial $V(r) = V_0\Theta(R-r)$. Considere los casos atractivo y repulsivo.

   b) Verifique que en el limite $kR \ll 1$, $\sigma_0(k)$ coincide con la aproximación de Born para la sección eficaz total si $k_0R \ll 1$ donde $k_0 = \sqrt{2m|V_0|}/\hbar$.

   c) Encuentre $\delta_1(k)$ y $\sigma_1(k)$ para $kR \ll 1$ y $k_0R \ll 1$, y verifique que $\sigma_1(k) \ll \sigma_0(k)$. Muestre que con la inclusión de $\delta_1(k)$ la sección eficaz diferencial es de la forma $A(1 + \gamma\cos\theta)$. Encuente γ.

   d) Estudie en detalle $\delta_0(k)$ y $\sigma_0(k)$ para $kR \ll 1$, en el caso $V_0 < 0$ y $k_0R \approx \pi/2$ (dispersión resonante).

e) Encuente la longitud de dispersión para el potencial $V(r) = -V_0\eta(r-R)$ con $V_0 = \frac{\hbar^2\pi^2}{8mR^2} + \Delta$, y $\Delta \ll 1$. Verifique que en este caso el potencial posee un solo estado ligado. Obtenga una expresión para $k \coth \delta_0$ si $kR \ll 1$ conservando términos de orden k^2.

5. **Potencial de Coulomb**

a) A partir de la solución de la ecuación de Schrödinger, calcule la sección eficaz correspondiente a la dispersión por un potencial de Coulomb (dispersión de Rutherford) y verifique que la aproximación de Born utilizada en el Ejercicio 1 conduce al resultado exacto.

b) Calcule la sección eficaz de la dispersión de dos partículas idénticas que interactúan mediante un potencial Coulombiano. Considere el caso fermiónico y bosónico.