Mecánica Cuántica II

Prof. Fidel Schaposnik
JTP Aníbal Iucci

Práctica 2

Año 2014

1. **Soluciones de la ecuación de Dirac: partícula libre**

   a) Obtenga las soluciones normalizadas de la ecuación de Dirac para partículas libres con impulso $(0, 0, p_z)$. Hágalo *i*) directamente de la ecuación, y *ii*) mediante la aplicación de un boost a la solución en el sistema donde la partícula está en reposo.

   b) Encuentre la evolución temporal de la función de onda dada a $t = 0$ por $\psi(0, \boldsymbol{r}) = Ae^{ikz}\omega$, donde

   $$\omega = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   en la representación de Dirac. Encuentre la densidad de corriente.

   c) Idem para u paquete de ondas gaussiano, dado a tiempo $t = 0$ por

   $$\psi(0, \boldsymbol{r}) = \frac{1}{(\pi d^2)^{3/4}} e^{-|\boldsymbol{r}|^2/2d^2}\, \omega.$$

   Muestre que los coeficientes de la expansión de $\psi(t, \boldsymbol{r})$ correspondientes a estados de energía negativa son apreciables sólo si $d \approx \frac{\hbar}{mc}$ o menor.

   d) Escriba la ecuación de Dirac en la representación quiral. Muestre que para soluciones de energía E se obtiene,

   $$(E - c\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{p})\varphi_R = -mc^2\varphi_L \qquad (1)$$
   $$(E + c\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{p})\varphi_L = -mc^2\varphi_R \qquad (2)$$

   donde $\psi = \begin{pmatrix} \varphi_R \\ \varphi_L \end{pmatrix}$. Para partículas de masa nula o muy pequeña (por ej. neutrinos) se obtienen de esta forma dos ecuaciones desacopladas. Encuentre explícitamente la solución en ese caso. Muestre que la helicidad no es invariante de Lorentz. Pruebe que la quiralidad γ^5 es un buen número cuántico (e invariante de Lorentz), que coincide con la helicidad para estados de energía positiva, y es opuesta para los de energía negativa (los neutrinos poseen quiralidad negativa). ¿Poseen las soluciones del tipo $\begin{pmatrix} \varphi_R \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_L \end{pmatrix}$ paridad definida?

2. **Simetría de carga y de inversión temporal**

3. Muestre que la ecuación de Dirac es invariante frente a inversión de carga y a inversión temporal. Construya explícitamente los operadores que efectúan estas transformaciones.

4. **Paradoja de Klein para la ecuación de Dirac**

   Encuentre los coeficientes de reflexión y transmisión para un electrón de energía E y helicoidal definida moviéndose en la dirección z, que incide sobre un escalón de potencial electrostático de altura V, al pasar por $z = 0$. Considere los casos $E > V + mc^2$, $|E - V| < mc^2$, y $E < V - mc^2$. Discuta en particular este último caso. Compare con el caso de una partícula relativista escalar.

5. **Ecuación para un electrón en un campo electromagnético**

   a) Escriba la ecuación de Dirac para una partícula cargada en presencia de un campo electromagnético y verifique la invarianza de gauge.

b) Deduzca el acoplamiento de Pauli entre el spin y el campo magnético y obtenga el factor giromagnético $g = 2$.

Resuelva la ecuación de Dirac para un electrón en un campo magnético homogéneo y constante $\boldsymbol{B}$ en la dirección del eje z (puede utilizar, por ejemplo, el gauge $A^0 = A?x = A^z = 0, A^y = Bx$). Muestre que los niveles de energía están dados por la expresión

$$\frac{E_{nsp_z}^2 - m^2c^4}{2mc^2} = \frac{p_z^2}{2m} + \frac{|e|\hbar}{m} B \left(n + \tfrac{1}{2} - s\right)$$

donde $n = 0, \ldots,$ $s = \pm\frac{1}{2}$, $-\infty < p_z < \infty$. Discuta la degeneración de los niveles.

c) Muestre que el Hamiltoniano de Dirac para un átomo hidrogenoide conmuta con el momento angular total $J_i = L_i + \Sigma_i$. Calcule el Hamiltoniano en los subespacios de momento angular definido y encuentre los estados estacionarios resolviendo la ecuación radial correspondiente. Calcule el espectro de energías y luego estudie el límite no-relativista. ¿Qué sucede en el caso $Z > 137$?