Mecánica Cuántica II

Prof. Fidel Schaposnik
JTP Aníbal Iucci

Práctica 1

Año 2014

1. **Repaso**

   a) Escriba las componentes covariantes y contravariantes del cuadrivector posición e impulso. Escriba el producto escalar $A_\mu B^\mu$ en componentes covariantes y contravariantes.

   b) Considere la transformación de Lorentz $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$. Indique cómo se transforma x_μ, $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$, p^μ y $L^{\mu\nu} = x^\mu p^\nu - x^\nu p^\mu$.

2. **Paradoja de Klein**

   Una partícula cargada escalar –sin spin– con energía definida incide sobre un potencial electrostático escalón unidimensional. Calcule la función de onda, la densidad de corriente y los coeficientes de transmisión y reflexión. Considere los casos no-relativista (ec. de Schrödinger) y relativista (ec. de Klein-Gordon). Analice los casos *i*) $E > V + mc^2$, *ii*) $|E - V| < mc^2$ y *iii*) $E < V - mc^2$ Interprete el resultado relativista del último caso en términos de la creación de partículas inducida por una carga que incide sobre un campo eléctrico concentrado en un punto. Tenga en cuenta la sugerencia hecha por W. Pauli a O. Klein de considerar la velocidad de grupo de las partículas.

3. **Álgebra de Clifford**

   Partiendo del anticonmutador $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$, demuestre las siguientes relaciones:

   a) $(\gamma^\mu)^{-1} = \gamma_\mu \equiv g_{\mu\nu}\gamma^\nu, \qquad \gamma^\mu\gamma_\mu = 4\mathbb{1}$

   b) $\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0, \quad (\gamma^5)^2 = \mathbb{1}, \quad \gamma^0\gamma^5\gamma^0 = -\gamma^5, \qquad (\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3)$

   c) $\mathrm{tr}(\gamma^\mu) = 0, \quad \mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu}, \quad \mathrm{tr}(\gamma^5) = 0$

4. Muestre que $(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0$

5. **Grupo de Lorentz**

   a) Considere los generadores del grupo de Lorentz $\mathcal{M}^{\rho\sigma}$ (6 matrices de 4×4 dado que $\mathcal{M}$ es antisimétrica en ρ y σ), dados por $(\mathcal{M}^{\rho\sigma})^{\mu\nu} = i(g^{\rho\mu}g^{\sigma\nu} - g^{\sigma\mu}g^{\rho\nu})$ y los elementos del grupo $\Lambda = e^{\frac{-i}{2}\Omega_{\mu\nu}\mathcal{M}^{\mu\nu}}$. Construya las transformaciones (de cuadrivectores) para boosts en el eje x y rotaciones en el eje z. Ayuda: Dado que los vectores transforman según $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ se deben encontrar las matrices $\Lambda^\mu{}_\nu$. Para esto es necesario considerar $(\mathcal{M}^{\rho\sigma})^\mu{}_\nu$

   b) Muestre que la ecuación de Klein-Gordon es invariante ante transformaciones de Lorentz.

   c) Considere las matrices $\Sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$. Muestre que satisfacen:

      1) $[\Sigma^{\mu\nu}, \gamma^\rho] = 2i(\gamma^\mu g^{\nu\rho} - \gamma^\nu g^{\rho\mu})$

      2) El álgebra del grupo de Lorentz, $[\Sigma^{\mu\nu}, \Sigma^{\rho\sigma}] = 2i(\Sigma^{\mu\sigma}g^{\nu\rho} - \Sigma^{\nu\sigma}g^{\mu\rho} - \Sigma^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} + \Sigma^{\nu\rho}g^{\mu\sigma})$

   De este modo, construimos otra representación del álgebra del grupo de Lorentz (los $\Sigma^{\mu\nu}$) y del grupo mismo, $S[\Lambda] = e^{-\frac{i}{4}\Omega_{\mu\nu}\Sigma^{\mu\nu}}$. Mientras los Λ transforman cuadrivectores (ejemplo, el potencial vector $A^\mu(x)$), los $S[\Lambda]$ transforman spinores $\psi(x)$:

   $$\begin{aligned} x \to x'^\mu &= \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \\ A^\mu(x) \to A'^\mu(x') &= \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu(\Lambda^{-1}x') \\ \psi^\alpha(x) \to \psi'^\alpha(x') &= S[\Lambda]^\alpha{}_\beta \psi^\beta(\Lambda^{-1}x') \end{aligned}$$

   Nótese que ambos grupos de matrices poseen la misma dimensión 4 a pesar de ser representaciones diferentes.

   d) Muestre que $[\gamma^5, \Sigma_{\mu\nu}] = 0$.

   e) Muestre que $S\gamma^0 S^\dagger = b\gamma^0$. ¿Qué valores puede tomar b?

f) Muestre que $\bar{\psi}\psi$ es un escalar, $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ es un cuadrivector, y $\bar{\psi}\gamma^5\psi$ un pseudoescalar. ¿Es $\psi^\dagger\psi$ un escalar? Indique cómo se transforma ante rotaciones y boosts.

g) Muestre que si los cuadrivectores A_μ y B_μ conmutan con las matrices γ^μ, se satisface $(A_\mu\gamma^\mu)(B_\nu\gamma^\nu) = A_\mu B^\mu + \frac{1}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]A_\mu B_\nu$.

h) Encuentre la matriz $S[\Lambda]$ para un boost en la dirección del eje x y una rotación en la dirección del eje z (¿qué ocurre para una rotación en un ángulo de 2π?), y la matriz de transformación ante paridad. Escríbalas explícitamente en la representación de Dirac. ¿Cómo se transforman los espinores ante paridad?

i) Muestre que la ecuación de Dirac es invariante ante transformaciones de Lorentz.

6. Considere la **representación quiral**

$$\alpha^i = \begin{pmatrix} \tau^i & 0 \\ 0 & -\tau^i \end{pmatrix} \qquad \beta = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}$$

donde τ^i son las matrices de Pauli.

a) Verifique que se cumplen las relaciones básicas entre las matrices α^i, β.

b) Encuentre las matrices γ^μ y γ^5 en esta representación. Verifique que

$$\gamma^\mu_Q = S\gamma^\mu_D S^T, \qquad S = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & \mathbb{1} \end{pmatrix}$$

donde γ^μ_Q y γ^μ_D denotan las representaciones quiral y de Dirac respectivamente.

c) Escriba explícitamente la matriz de transformación de espinares ante un boost en el eje x en esta representación.

d) Idem para una rotación en torno al eje z.

e) Idem para una transformación de paridad.

7. Sea $H = \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p}$ donde $\boldsymbol{S}$ es el operador de spin no relativista (para partículas de spin $1/2$, H puede representarse por $\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}$).

a) Muestre que $[H, \boldsymbol{J}] = 0$, donde $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{S}$ es el impulso angular total. ¿Commuta H con $\boldsymbol{L}$ o $\boldsymbol{S}$? ¿Es invariante ante una transformación de paridad?

b) Considere ahora $D = \gamma^\mu p_\mu$. Verifique que $[D, J^{\mu\nu}] = 0$, donde $J^{\mu\nu} = L^{\mu\nu} + S^{\mu\nu}$. Muestre que D también es invariante frente a una transformación de paridad.