

## Práctica 5: distribuciones. Análisis de Fourier

1. Muestre que el conjunto de funciones  $\{1, \cos(n\pi x/L), \sin(n\pi x/L), n = 1, 2, \dots\}$  es ortogonal.

2. Evalúe

$$\begin{aligned} \text{a)} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-2)f(x) dx, \quad \text{b)} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(6x)f(x) dx, \quad \text{c)} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x^2-4)f(x) dx, \\ \text{d)} \int_{-\infty}^{\infty} \delta'(x-1)f(x) dx, \quad \text{e)} \int_{-\infty}^{\infty} [H(x+1) - H(x-1)]f(x) dx, \\ \text{f)} \int dx dy \delta(x-1)\delta(2y-1)f(x,y), \quad \text{g)} \int dx dy (\delta(x-1) + \delta(2y-1))f(x,y), \\ \text{h)} \int dx dy \delta(\sqrt{x^2+y^2}-a)f(x,y), a > 0. \end{aligned}$$

3. Encuentre el desarrollo en serie de Fourier en el intervalo  $[-L, L]$  de las siguientes funciones, especificando a qué función converge la serie en dicho intervalo.

$$\text{a)} f(x) = 1, \quad \text{b)} f(x) = x, \quad \text{c)} f(x) = x^2, \quad \text{d)} f(x) = |x|.$$

¿Coincide el desarrollo obtenido en **b)** con la derivada del desarrollo de  $x^2/2$ ? ¿Coincide el desarrollo obtenido en **a)** con la derivada del desarrollo **b)**? Explique.

Evalúe, utilizando **c)**, las series  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  y  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ . Grafique en *Mathematica* la suma de los primeros 5, 10, 20 y 100 términos del desarrollo **b)**.

4. Encuentre el desarrollo en serie de Fourier en el intervalo  $[-1, 1]$  de las funciones

$$\text{a)} f(x) = \sin^2(\pi x), \quad \text{b)} f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

Indique a qué función converge el desarrollo para  $x \in [-1, 1]$ .

5. Encuentre el desarrollo en serie de medio rango en cosenos en el intervalo  $[0, \pi]$  de las funciones

$$\text{a)} f(x) = 1, \quad \text{b)} f(x) = x.$$

Indique en todos los casos a qué función converge el desarrollo para  $x \in [-\pi, \pi]$ . ¿Qué condición de contorno satisfacen las funciones  $\cos nx$  en  $x = 0$  y  $x = \pi$ ?

6. Encuentre el desarrollo en serie de medio rango en senos, en el intervalo  $[0, \pi]$  de las funciones

$$\text{a)} f(x) = 1, \quad \text{b)} f(x) = x, \quad \text{c)} f(x) = \sin x.$$

Indique en todos los casos a qué función converge el desarrollo para  $x \in [-\pi, \pi]$ . ¿Qué condición de contorno satisfacen las funciones sin  $nx$  en  $x = 0$  y  $x = \pi$ ?

7. Sean  $F(k)$  y  $G(k)$  las Transformadas de Fourier de  $f(x)$  y  $g(x)$  respectivamente, pruebe que

- a) la transformada de Fourier de  $a f(x) + b g(x)$  es  $a F(k) + b G(k)$  (linealidad),
- b) la transformada de Fourier de  $f(x + b)$  es  $e^{ibk} F(k)$ ,
- c) la transformada de Fourier de  $f(ax)$  para  $a \neq 0$  es  $F(k/a)/|a|$ ,
- d) la transformada de Fourier de  $f'(x)$  es  $ikF(k)$ ,
- e) la transformada de Fourier de  $xf(x)$  es  $iF'(k)$ .

8. Muestre que la transformada de Fourier del producto de dos funciones es proporcional a la convolución de las transformadas de Fourier de cada una de ellas.

9. Encuentre la transformada de Fourier de las siguientes funciones:

- a)  $f(x) = e^{-a|x|}$ ,  $a > 0$ ,    b)  $f(x) = e^{-x^2/2\sigma^2}$ ,    c)  $f(x) = H(x + a) - H(x - a)$ ,
- d)  $f(x) = \delta(x)$ ,    e)  $f(x) = 1$ ,    f)  $f(x) = \sin x$ ,    g)  $f(x) = \cos x$ ,    h)  $f(x) = xe^{-a|x|}$ .

10. Calcule la transformada de Laplace de las siguientes funciones:

- a)  $f(x) = e^{-ax}$ ,    b)  $f(x) = xe^{-x}$ .