Práctica 4: integrales en variable compleja. Desarrollos en series de potencias. Residuos

1. Evalúe la integral $\displaystyle\int_C z^2 dz$, donde C es la curva dada por

a) El segmento que une 1 con i.

b) El cuarto de círculo de radio 1 con centro en el origen que une 1 con i.

c) Verifique la concordancia con la evaluación directa por medio de la primitiva de z^2.

d) Verifique que en este ejemplo $\int_C |z|^2 dz$ depende del camino.

2. Encuentre el valor de las siguientes integrales, donde el camino es una curva simple arbitraria entre los límites indicados:

$$\textbf{a)}\ \int_{1/2}^{i-1} e^{-\pi z}\, dz\,, \quad \textbf{b)}\ \int_0^{\pi-i} \sin\frac{z}{2}\, dz\,, \quad \textbf{c)}\ \int_i^2 (z-1)^2\, dz\,.$$

3. Resuelva empleando la fórmula de Cauchy para $f(z)$ o sus derivadas:

a) $\int_C \frac{\cos z}{z-\pi/2}\, dz$ donde C es un círculo $|z| = 3$.

b) $\int_C \frac{\cos(2z)}{z(z-\pi/2)}\, dz$ donde C es el círculo $|z| = 1$.

c) $\int_C \frac{\cos(2z)}{z(z-\pi/2)}\, dz$ donde C es el círculo $|z| = 2$.

d) $\int_C \frac{e^{-z}}{(z-i)\cos(z)}\, dz$ donde C es el círculo $|z - i| = 1$.

4. Obtenga el desarrollo en serie de Taylor alrededor del origen, determinando el radio de convergencia, en los siguientes casos:

$$\textbf{a)}\ f(z) = z^2\, e^{2z}\,, \quad \textbf{b)}\ f(z) = \frac{1}{z-3}\,, \quad \textbf{c)}\ f(z) = \frac{1}{(z-1)^2}\,, \quad \textbf{d)}\ f(z) = \frac{\sinh z}{z}\,.$$

A partir del desarrollo obtener la expresión general para las derivadas $f^{(n)}(0)$.

5. Obtenga el desarrollo en serie de Taylor de la función dada alrededor de $z = a$ y determine su radio de convergencia:

$$\textbf{a)}\ f(z) = \sin z, \quad a = \frac{\pi}{2}\,, \quad \textbf{b)}\ f(z) = \frac{1}{z}, \quad a = 1 - i\,.$$

6. Represente, dando el rango de validez, la función $f(z) = (z - 1)/(z + 1)$ mediante:

a) Un desarrollo de Taylor centrado en $z = 0$.

b) Un desarrollo de Laurent centrado en $z = 0$ para $|z| > 1$.

7. Encuentre los desarrollos en serie de Laurent de las siguientes funciones alrededor de los puntos indicados (y que converjan en los valores señalados), determinando la región de convergencia.

a) $f(z) = \frac{1}{1+z}$ alrededor de $z = 0$, que converja en $i)$ $z = \frac{1}{2}$ y $ii)$ $z = 4i$,

b) $f(z) = \frac{z}{(z-2)^3(z-1)}$ alrededor de $z = 2$, que converja en $z = 3i$,

c) $f(z) = \frac{\cos(z^2)}{z^2}$ alrededor de $z = 0$, que converja $\forall\ z \neq 0$,

d) $f(z) = z^2 e^{1/z}$ alrededor de $z = 0$, que converja $\forall\ z \neq 0$,

e) $f(z) = \cos\left(\frac{1}{z^2}\right)$ alrededor de $z = 0$, que converja en $z = 1$.

Determine y clasifique todas las singularidades de las funciones anteriores.

8. Determine y clasifique las singularidades de las siguientes funciones $f(z)$:

$$\textbf{a)}\ f(z) = \frac{1}{z^2+1}, \quad \textbf{b)}\ f(z) = z\cos\left(\frac{1}{z}\right), \quad \textbf{c)}\ f(z) = \frac{1}{z(z-i)} + \frac{4}{(z-i)^2},$$
$$\textbf{d)}\ f(z) = \frac{1}{1+e^{2z}}, \quad \textbf{e)}\ f(z) = \sqrt{z+3}.$$

9. Evalúe, por medio del teorema de los residuos, $\oint_C f(z)dz$ para las funciones del problema anterior, siendo la curva C un círculo de radio 2 (recorrido en sentido antihorario) centrado en el origen.

10. Evalúe, por medio de la representación como integral compleja,

$$\textbf{a)}\ \int_0^{2\pi} \frac{1}{p+\sin\theta}\,d\theta,\ \ p>1, \quad \textbf{b)}\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4}\,dx, \quad \textbf{c)}\ \int_0^{\infty} \frac{1+x^2}{1+x^4}\,dx, \quad \textbf{d)}\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^4}\,dx.$$