Práctica 3: funciones analíticas de una variable compleja

1. Sea $z = 1-i$. Escriba los siguientes números complejos en la forma binomial ($x+iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$) y en la forma polar ($re^{i\theta}$ con $r \in \mathbb{R}+$ y $\theta \in [0, 2\pi)$):

$$\textbf{a)}\ iz\,, \quad \textbf{b)}\ z^{-1}\,, \quad \textbf{c)}\ \frac{1-z}{1+z}\,, \quad \textbf{d)}\ z\,\bar{z}\,, \quad \textbf{e)}\ z^3\,.$$

2. Exprese los siguientes números complejos en la forma binomial:

$$\textbf{a)}\ e^{-i\pi/2}\,, \quad \textbf{b)}\ e^{-i3\pi}\,, \quad \textbf{c)}\ e^{i\pi/2+\ln 2}\,, \quad \textbf{d)}\ 2e^{(1-i\pi)/2}\,, \quad \textbf{e)}\ e^{\pi/(2i)} - e^{i3\pi}\,.$$

3. Evalúe las siguientes potencias:

$$\textbf{a)}\ (1-i)^6\,, \quad \textbf{b)}\ \frac{(1+i)^4}{1-i}\,, \quad \textbf{c)}\ (1+i\sqrt{2})^6\,, \quad \textbf{d)}\ \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^4\,.$$

4. Encuentre las siguientes raíces:

$$\textbf{a)}\ \sqrt[4]{i}\,, \quad \textbf{b)}\ \sqrt{-9}\,, \quad \textbf{c)}\ \sqrt[5]{-4}\,, \quad \textbf{d)}\ \sqrt[3]{64}\,.$$

5. Evalúe

$$\textbf{a)}\ \ln(-e)\,, \quad \textbf{b)}\ \ln(i)\,, \quad \textbf{c)}\ \ln[(1+i)^2]\,.$$

6. Encuentre

$$\textbf{a)}\ i^i\,, \quad \textbf{b)}\ 2^{-2i}\,, \quad \textbf{c)}\ x^{i-1}\ (x>0)\,.$$

7. Demuestre las siguientes propiedades

a) $\cos(x+iy) = \cos(x)\cosh(y) - i\sinh(y)\sin(x)\,,$

b) $\sinh(x+iy) = \sinh(x)\cos(y) + i\sin(y)\cosh(x)\,,$

c) $\sin(-z) = -\sin(z)\,,$

d) $\cosh(-z) = \cosh(z)\,,$

e) $\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1\,,$

f) $\cosh^2(z) - \sinh^2(z) = 1\,.$

8. Evalúe

$$\textbf{a)}\ \sin(2i)\,,\quad \textbf{b)}\ \sin(\pi/2 + i\ln 2)\,,\quad \textbf{c)}\ \sinh(2i)\,,\quad \textbf{d)}\ \sinh(i\pi/2 + \ln 2)\,.$$

9. Considere una partícula moviéndose en el plano x, y y cuya posición está descripta en forma compleja por la ecuación $z(t) = re^{i\theta(t)}$, con r constante. Obtenga una expresión para la velocidad y aceleración de la partícula en términos de la velocidad angular $\omega = d\theta/dt$ y la aceleración angular $\alpha = d\omega/dt$. Interprete.

10. Sea $z = x + iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$. Use las condiciones de Cauchy-Riemann para determinar cuáles de las siguientes funciones son analíticas en alguna región del plano complejo:

$$\textbf{a)}\ f(z) = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)\,,\quad \textbf{b)}\ f(z) = e^{-x}(\cos y - i\sin y)\,,$$
$$\textbf{c)}\ \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + i\arctan(y/x)\,,\quad \textbf{d)}\ \frac{iy + x}{x^2+y^2}\,,\quad \textbf{e)}\ x + 2iy\,.$$

Obtenga una expresión para las funciones anteriores en términos de z y $\bar{z}$. En los casos en los que $f(z)$ sea analitica, encuentre una expresión para $f'(z)$.

11. Verifique, a partir de la sustitución $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ y la regla de la cadena, que la forma polar de las condiciones de Cauchy-Riemann es la obtenida por el método direccional, $u_r = v_\theta/r$, $v_r = -u_\theta/r$, si $z = re^{i\theta}$ y $f(z) = u(r,\theta) + iv(r,\theta)$. Verifique también que $f'(z) = e^{-i\theta}(u_r + iv_r)$.

12. Diga si las siguientes funciones satisfacen las condiciones de Cauchy-Riemann para $-\pi < \theta \leq \pi$:

$$\textbf{a)}\ f(z) = \frac{e^{-i\theta}}{r},\quad r \neq 0\,,\quad \textbf{b)}\ f(z) = r^{1/2}e^{i\theta/2}\,,\quad \textbf{c)}\ f(z) = r^2\left[-\sin(2\theta) + i\cos(2\theta)\right],$$
$$\textbf{d)}\ f(z) = re^{-i\theta}\,.$$

Obtenga una expresión para las funciones anteriores en términos de z y $\bar{z}$. En los casos en los que f sea analítica, obtenga una expresión para su derivada.

13. Sabiendo que $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ es analítica ¿puede asegurar que alguna de las siguientes funciones lo sea?

$$\textbf{a)}\ g(z) = v(x,y) + iu(x,y)\,,\quad \textbf{b)}\ h(z) = v(x,y) - iu(x,y)\,,\quad \textbf{c)}\ k(z) = u(x,y) - iv(x,y)\,.$$

14. Encuentre, en los casos en que sea posible, la función armónica conjugada de las siguientes funciones, y obtenga una expresión para la $f(z)$ resultante:

$$\textbf{a)}\ u(x,y) = -xy\,,\quad \textbf{b)}\ u(x,y) = y^3 - 3x^2y + x^2 + 4y\,,\quad \textbf{c)}\ u(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2} - x\,,$$
$$\textbf{d)}\ u(x,y) = e^x \operatorname{sen} y\,.$$