Práctica 2: series

1. Indique cuáles de las siguientes series geométricas son convergentes. Cuando corresponda, evalúelas.

$$\textbf{a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n+1}{5^n}\,, \quad \textbf{b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-2^n}{3^n}\,, \quad \textbf{c)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1+5^n(-1)^n}{6^n}\,.$$

2. El primer término de una serie geométrica es a. El cuarto y quinto término son, respectivamente, 12 y -8. ¿Cuánto vale la suma de la serie?

3. En una población circula un virus tal que un individuo infectado en un determinado día contagia en promedio a otros 2,5 al día siguiente. Si un dado día hay dos individuos infectados, ¿cuántos se habrán infectado al cabo de quince días? Si la población total es de 8100 millones de individuos, ¿cuántos días tienen que pasar para que todos se hayan infectado?

4. Una pelota que se deja caer al piso desde una altura h rebota hasta una altura rh, con $0 < r < 1$. Encuentre la distancia total recorrida por la pelota hasta detenerse.

5. Determine cuáles de las siguientes series son convergentes y, en tal caso, si convergen absoluta o condicionalmente.

$$\textbf{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2}\,, \quad \textbf{b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\sqrt{n}}{n^3+1}\,, \quad \textbf{c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}\,, \quad \textbf{d)} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{2}{n}\right)\,, \quad \textbf{e)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log n}\,,$$

$$\textbf{f)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^2}\,, \quad \textbf{g)} \sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n}\,, \quad \textbf{h)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3}\,, \quad \textbf{i)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+4}}\,, \quad \textbf{j)} \sum_{n=1}^{n} (-1)^n \sin\left(\frac{1}{n}\right)\,,$$

$$\textbf{k)}\ 1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \ldots\,.$$

6. ¿Cuántos términos hay que sumar para estimar las siguientes series con un error menor a 10^{-2}?

$$\textbf{a)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^2}\,, \quad \textbf{b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!}\,, \quad \textbf{c)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}\,.$$

7. Sabemos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ es divergente. ¿Pueden las sumas parciales S_N superar el valor 100? Si es así, estime un valor de N tal que esto ocurra.

8. Determine el radio de convergencia y el intervalo de convergencia de las siguientes series de potencias.

a) $\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n$, **b)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2x)^n}{n}$, **c)** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{3^n}$, **d)** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!}$, **e)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n^4}$, **f)** $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{\ln n}$.

En los casos **a)** a **d)**, encuentre la función $f(x)$ a la que converge la serie.

9. Evalúe las siguientes series:

$$\textbf{a)} \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n} \;, \qquad \textbf{b)} \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!} \,.$$

10. Encuentre los desarrollos en serie de Taylor alrededor de $x = 0$ de las siguientes funciones, indicando el intervalo de convergencia y escribiendo explícitamente los dos primeros términos no nulos.

$$\textbf{a)}\ e^x \,, \quad \textbf{b)}\ \sin x \,, \quad \textbf{c)}\ \cos x \,, \quad \textbf{d)}\ \ln(1+x) \,, \quad \textbf{e)}\ \frac{1}{1+x} \,.$$

11. Halle los desarrollos en serie de Taylor alrededor del origen de las siguientes funciones, y escriba explícitamente los dos primeros términos no nulos (use, cuando sea posible, los desarrollos obtenidos en el ejercicio 10).

$$\textbf{a)}\ \cos(3x) - 1 \,, \quad \textbf{b)}\ \frac{\sin(x)}{x} \,, \quad \textbf{c)}\ \frac{1}{8+6x} \,, \quad \textbf{d)}\ \sqrt{1+x} \,.$$

12. A partir del desarrollo en serie de $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, obtenga una expresión para el desarrollo en serie de $\arctan x$ alrededor del origen, indicando el intervalo de convergencia. Utilice este desarrollo para hallar $\arctan(1/4)$ con error menor que 10^{-2}.

13. A partir del desarrollo en serie de e^x y $\sin x$ determine el desarrollo en serie de las funciones

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt \,, \qquad g(x) = \int_0^x t \sin t^2 dt \,.$$

Halle $f(1)$ y $g(1)$ con error menor que 10^{-2}.

14. Considere las funciones

$$f(x) = \frac{e^x - 1 - x}{x^2} \,, \qquad g(x) = \frac{\log(1+x)}{x} \,, \qquad h(x) = (1+x)^{s/x} \,, \; s \in \mathbb{R}$$

a) Determine los límites de estas funciones cuando $x \to 0$. Compare con los resultados obtenidos por el método de L'Hôpital.

b) Determine sus polinomios de Taylor de grado 1 alrededor de $x = 0$ (suponga que en $x = 0$ se definen de modo tal que resulten continuas).

15. Encuentre el radio de convergencia de las siguientes series y el dominio de las funciones a las cuales convergen. Escriba la serie que representa a las derivadas y determine el dominio de las mismas:

$$\textbf{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n3^n}, \quad \textbf{b)} \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-3)^n}{n(n-1)}.$$

Problemas para hacer en Mathematica

1. Considere las sumas parciales

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}$$

Obtenga valores de S_N para $N = 10$ y para $N = 100$ (en forma decimal). Calcule el valor de la serie (en el límite $N \to \infty$) y encuentre el error cometido al aproxmar la serie por las sumas parciales.

2. Considere las sumas parciales

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$$

Obtenga valores de S_N para $N = 10$, $N = 100$, y $N = 1000$ (en forma decimal). ¿Qué ocurre? Pruebe calcularla para $N = \infty$.

3. Grafique las siguientes funciones y sus polinomios de Taylor de grado 1,2,4,10 alrededor de $x = 0$ en un mismo gráfico. Pruebe cambiar el intervalo en el que gráfica. Obtenga la diferencia entre el valor exacto que obtiene Mathematica para $f(1)$ (recuerde escribirlo como 1,0) y el del polinomio de Taylor de grado 10.

$$a)\ f(x) = e^x, \qquad b)\ f(x) = \sin x \qquad c) f(x) = xe^{-x^2} \ln(1+x)$$