Práctica 1: sucesiones

1. Escriba los primeros cinco términos de cada una de las siguientes sucesiones.

$$\textbf{a)}\ a_n = 1 - \frac{1}{n}\,, \quad \textbf{b)}\ a_n = \frac{(-1)^n}{n}\,, \quad \textbf{c)}\ a_n = \frac{1}{2^n}\,, \quad \textbf{d)}\ a_n = \frac{2n}{n^2+1}\,.$$

2. Encuentre el término general a_n de cada una de las siguientes sucesiones.

$$\textbf{a)}\ 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \cdots\,, \quad \textbf{b)}\ 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \cdots\,, \quad \textbf{c)}\ \frac{1}{2}, \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}, \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}, \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}, \cdots\,,$$

$$\textbf{d)}\ \frac{1}{2}, -\frac{4}{9}, \frac{9}{28}, -\frac{16}{65}, \cdots\,, \quad \textbf{e)}\ \frac{1}{2}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{12}, -\frac{1}{20}, \cdots\,, \quad \textbf{f)}\ 1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{9}, \frac{1}{7}, -\frac{1}{12}, \cdots\,.$$

Ayuda: para encontrar el término general de una sucesión de números enteros puede usar la enciclopedia oeis.org.

3. Muestre que las siguientes sucesiones son crecientes o decrecientes a partir de algún término.

$$\textbf{a)}\ a_n = \frac{1}{n^2}\,, \quad \textbf{b)}\ a_n = \frac{n}{n+1}\,, \quad \textbf{c)}\ a_n = \frac{n+3}{n!}\,, \quad \textbf{d)}\ a_n = \frac{n}{5^n}\,.$$

Verifique usando *Mathematica*.

4. Determine cuáles de las siguientes sucesiones son monótonas y encuentre su límite.

$$\textbf{a)}\ a_n = \frac{n+1}{n!}\,, \quad \textbf{b)}\ a_n = \frac{100^n}{n!}\,, \quad \textbf{c)}\ a_n = \frac{e^n - 1}{n}\,.$$

Verifique usando *Mathematica*.

5. Considere la sucesión de Fibonacci, definida recursivamente como

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n\,, \qquad \text{con} \quad F_1 = 1 \quad \text{y} \quad F_2 = 2\,.$$

a) Muestre que los cocientes $a_n := F_{n+1}/F_n$ satisfacen la relación

$$a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n}\,.$$

b) Suponga que la sucesión de cocientes a_n es convergente y muestre que su límite es el número áureo $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

6. Muestre que la sucesión $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$, con $a_1 = 1$, es creciente y acotada. Encuentre su límite.