

1. Encuentre el desarrollo en serie de Fourier en el intervalo $[-L, L]$ de las siguientes funciones, especificando a qué función converge la serie en dicho intervalo.

$$a) f(x) = 1 \quad b) f(x) = x \quad c) f(x) = x^2 \quad d) f(x) = |x|$$

¿Coincide el desarrollo obtenido en $b)$ con la derivada del desarrollo de $x^2/2$? ¿Coincide el desarrollo obtenido en $a)$ con la derivada del desarrollo $b)$? Explique.

Evalúe, utilizando $c)$, las series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$. Grafique la suma de los primeros 5, 10, 20 y 100 términos del desarrollo $b)$, utilizando una computadora.

2. Encuentre el desarrollo en serie de Fourier en el intervalo $[-1, 1]$ de las funciones

$$a) f(x) = \sin^2(\pi x) \quad b) f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Indique a qué función converge el desarrollo para $x \in [-1, 1]$.

3. Encuentre la forma compleja del desarrollo en serie de Fourier en el intervalo $[-1, 1]$ de

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

4. Encuentre el desarrollo en serie de medio rango en cosenos en el intervalo $[0, \pi]$ de las funciones

$$a) f(x) = 1 \quad b) f(x) = x$$

Indique en todos los casos a qué función converge el desarrollo para $x \in [-\pi, \pi]$. ¿Qué condición de contorno satisfacen las funciones $\cos nx$ en $x = 0$ y $x = \pi$?

5. Encuentre el desarrollo en serie de medio rango en senos, en el intervalo $[0; \pi]$ de las funciones

$$a) f(x) = 1 \quad b) f(x) = x \quad c) f(x) = \sin(x)$$

Indique en todos los casos a qué función converge el desarrollo para $x \in [-\pi, \pi]$. ¿Qué condición de contorno satisfacen las funciones $\sin nx$ en $x = 0$ y $x = \pi$?

6

6. Evalúe

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-2)f(x)dx, \tag{1}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(6x)f(x)dx, \tag{2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x^2-4)f(x)dx, \tag{3}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(x-1)f(x)dx, \tag{4}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} [H(x+1) - H(x-1)]f(x)dx \tag{5}$$

$$\int dx dy \delta(x-1)\delta(2y-1)f(x, y) \tag{6}$$

$$\tag{7}$$

7. Sean $F(k)$ y $G(k)$ las Transformadas de Fourier de $f(x)$ y $g(x)$ respectivamente, pruebe que
- a) La transformada de Fourier de $af(x) + bg(x)$ es $aF(k) + bG(k)$. (linealidad)
 - b) La Transformada de Fourier de $f(x + b)$ es $e^{ibk}F(k)$.
 - c) La Transformada de Fourier de $f(ax)$, $a \neq 0$ es $F(k/a)/|a|$.
 - d) La Transformada de Fourier de $f'(x)$ es $ikF(k)$.
 - e) La Transformada de Fourier de $xf(x)$ es $iF'(k)$.
8. Mostrar que la transformada de Fourier del producto de dos funciones es proporcional a la convolución de las transformadas de Fourier de cada una de ellas.
9. Encuentre la transformada de Fourier de las siguientes funciones:
- a) $f(x) = e^{-a|x|}$, $a > 0$.
 - b) $f(x) = e^{-x^2/2\sigma^2}$.
 - c) $f(x) = H(x + a) - H(x - a)$.
 - d) $f(x) = \delta(x)$.
 - e) $f(x) = 1$.
 - f) $f(x) = \sin(x)$.
 - g) $f(x) = \cos(x)$.
 - h) $f(x) = xe^{-a|x|}$.