Matemáticas Especiales Física Médica

Prof. Aníbal Iucci
JTP Mariela Nieto

Práctica 5: Integrales en variable compleja. Desarrollos en Series de Potencias. Residuos

Año 2022

1. Evalúe explícitamente la integral $\int_C z^2 dz$, donde C es la curva dada por
   a) El segmento que une 1 con i.
   b) El cuarto de círculo de radio 1 con centro en el origen que une 1 con i.
   c) Verifique la concordancia con la evaluación directa por medio de la primitiva de z^2.
   d) Verifique que en este ejemplo $\int_C |z|^2 dz$ depende del camino.

2. Hallar el valor de las siguientes integrales, donde el camino es una curva simple arbitraria entre los límites indicados:
   - a)$\int_{1/2}^{i-1} e^{-\pi z}\ dz$
   - b)$\int_0^{\pi-i} \sin\frac{z}{2}\ dz$
   - c)$\int_i^2 (z-1)^2\ dz$

3. Obtenga el desarrollo en serie de Taylor alrededor del origen, determinando el radio de convergencia, en los siguientes casos:
   - a)$f(z) = z^2\ e^{2z}$
   - b)$f(z) = \frac{1}{z-3}$
   - c)$f(z) = \frac{1}{(z-1)^2}$
   - d)$f(z) = \frac{\sinh z}{z}$

   A partir del desarrollo obtener la expresión general para las derivadas $f^{(n)}(0)$.

4. Obtenga el desarrollo en serie de Taylor de la función dada alrededor de $z = a$ y determine su radio de convergencia:
   - a) $f(z) = \sin z, \quad a = \frac{\pi}{2}$
   - b)$f(z) = \frac{1}{z}, \quad a = 1 - i$

5. Represente, dando el rango de validez, la función $f(z) = (z-1)/(z+1)$ mediante:
   - a) Un desarrollo de Taylor centrado en $z = 0$.
   - b) Un desarrollo de Laurent centrado en $z = 0$ para $|z| > 1$.

6. Encuentre los desarrollos en serie de Laurent de las siguientes funciones alrededor de los puntos indicados (y que converjan en los valores señalados), determinando la región de convergencia.
   - a)$f(z) = \frac{1}{1+z}$, alrededor de $z = 0$, que converja en *i*) $z = \frac{1}{2}$ y *ii*) $z = 4i$
   - b)$f(z) = \frac{z}{(z-2)^3(z-1)}$, alrededor de $z = 2$, que converja en $z = 3i$
   - c)$f(z) = \frac{\cos(z^2)}{z^2}$, alrededor de $z = 0$, que converja $\forall\ z \neq 0$
   - d)$f(z) = z^2 e^{1/z}$, alrededor de $z = 0$, que converja $\forall\ z \neq 0$
   - e)$f(z) = \cos\left(\frac{1}{z^2}\right)$, alrededor de $z = 0$, que converja en $z = 1$

   Determine y clasifique todas las singularidades de las funciones anteriores.

7. Determine y clasifique las singularidades de las siguientes funciones $f(z)$:

   - a) $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$
   - b) $f(z) = z \cos\left(\frac{1}{z}\right)$
   - c) $f(z) = \frac{1}{z(z-i)} + \frac{4}{(z-i)^2}$
   - d) $f(z) = \frac{1}{1+e^{2z}}$
   - e) $f(z) = \sqrt{z+3}$

8. Evalúe, por medio del teorema de los residuos, $\oint_C f(z)dz$ para las funciones anteriores, siendo la curva C un círculo de radio 2 (recorrido en sentido antihorario) centrado en el origen ($|z| = 2$).

9. Evalúe, por medio de la representación como integral compleja,

   - a) $\int_0^{2\pi} \frac{1}{p+\sin\theta}\, d\theta, \quad p > 1$
   - b) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4}\, dx$
   - c) $\int_0^{\infty} \frac{1+x^2}{1+x^4}\, dx$
   - d) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^4}\, dx$