Matemáticas Especiales Física Médica

Prof. Aníbal Iucci
JTP Mariela Nieto

Práctica 3: Números complejos. Series y funciones de números complejos Año 2022

1. Sea $z = 1 - i$. Escriba en la forma $x + iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$, los siguientes números complejos:

   $$a)\ iz, \qquad b)\ z^{-1}, \qquad c)\ (1-z)/(1+z), \qquad d)\ z\,\bar{z}, \qquad e)\ z^3.$$

   Escriba los números anteriores en la forma polar ($re^{i\theta}$).

2. Exprese en la forma $z = x + iy$ los siguientes números complejos:

   $$a)\ e^{-i\pi/2}, \qquad b)\ e^{-i3\pi}, \qquad c)\ e^{i\pi/2+\ln 2}, \qquad d)\ 2e^{(1-i\pi)/2}, \qquad e)\ e^{\pi/(2i)} - e^{i3\pi}.$$

3. Utilizando que $z^n = r^n e^{in\theta}$ para $z = re^{i\theta}$, evalúe

   $$a)\ (1-i)^6, \qquad b)\ (1+i)^4/(1-i), \qquad c)\ (1+i\sqrt{2})^6, \qquad d)\ [(1+i)/(1-i)]^4.$$

4. Encuentre las siguientes raíces:

   $$a)\ \sqrt[4]{i}, \qquad b)\ \sqrt{-9}, \qquad c)\ \sqrt[5]{-4}, \qquad d)\ \sqrt[3]{64}.$$

5. Evalúe: $a)$ $\ln(-e)$, $b)$ $\ln(i)$, $c)$ $\ln[(1+i)^2]$.

6. Encuentre $a)$ i^i, $b)$ 2^{-2i}, $c)$ x^{i-1} $(x > 0)$.

7. Utilizando la definición de $\sin z$ y $\cos z$,

   a) Demuestre que $\cos(x + iy) = \cos(x)\cosh(y) - i\sinh(y)\sin(x)$.
   b) Demuestre que $\sin(x + iy) = \sin(x)\cosh(y) + i\sinh(y)\cos(x)$.
   c) Evalúe $i)$ $\sin(2i)$, $ii)$ $\sin(\pi/2 + i\ln 2)$.
   d) Demuestre: $i)$ $\sin(-z) = -\sin(z)$, $ii)$ $\cos(-z) = \cos(z)$, $iii)$ $\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1$.

8. Utilizando la definición de $\sinh z$ y $\cosh z$,

   a) Demuestre que $\cosh(x + iy) = \cosh(x)\cos(y) + i\sin(y)\sinh(x)$.
   b) Demostrar que $\sinh(x + iy) = \sinh(x)\cos(y) + i\sin(y)\cosh(x)$.
   c) Evaúe $i)$ $\sinh(2i)$, $ii)$ $\sinh(i\pi/2 + \ln 2)$.
   d) Demuestre: $i)$ $\sinh(-z) = -\sinh(z)$, $ii)$ $\cosh(-z) = \cosh(z)$, $iii)$ $\cosh^2(z) - \sinh^2(z) = 1$.

9. Considere una partícula moviéndose en el plano x, y y cuya posición está descripta en forma compleja por la ecuación $z(t) = re^{i\theta(t)}$, con r constante. Obtenga una expresión para la velocidad y aceleración de la partícula en términos de la velocidad angular $\omega = d\theta/dt$ y aceleración angular $\alpha = d\omega/dt$, e interprete el resultado.