Matemáticas Especiales Física Médica

Prof. Aníbal Iucci
JTP Mariela Nieto

Práctica 2: Series de potencias

Año 2022

1. Determine el radio de convergencia y el intervalo de convergencia de las siguientes series de potencias:

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n \qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n x^n}{n} \qquad c)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{3^n}$$
$$d)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n!} \qquad e)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n^4} \qquad f)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{\ln n}$$

   g) Encuentre las funciones $f(x)$ a las que convergen las series anteriores dentro de su intervalo de convergencia en los casos *a*), *b*), *c*), *d*)

2. Evalúe las siguientes series:

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n} \qquad b)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}$$

3. Encuentre los desarrollos en serie de Taylor alrededor de $x = 0$ de las siguientes funciones:

$$a)\ e^x \quad b)\ \sin x \qquad c)\ \cos x \qquad d)\ \ln(1+x) \qquad e)\ \frac{1}{1+x}$$

   indicando el intervalo de convergencia y escribiendo explícitamente los dos primeros términos no nulos.

4. Halle los desarrollos en serie de Taylor alrededor del origen de las siguientes funciones, y escribir explícitamente los dos primeros términos no nulos (utilizar cuando sea posible los desarrollos obtenidos en el ejercicio 3.

$$a)\ f(x) = \cos(3x) - 1 \qquad b)\ f(x) = \frac{\sin(x)}{x} c)\ f(x) = \frac{1}{8+6x} \qquad d)\ \sqrt{1+x}$$

5. A partir del desarrollo en serie de $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, obtenga una expresión para el desarrollo en serie de $\arctan x$ alrededor del origen, indicando el intervalo de convergencia. Utilice este desarrollo para hallar $\arctan(1/4)$ con error menor que 10^{-2}.

6. A partir del desarrollo en serie de e^x y $\sin x$ determine el desarrollo en serie de las funciones

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2}dt \qquad g(x) = \int_0^x t\sin t^2 dt$$

   Halle $f(1)$ y $g(1)$ con error menor que 10^{-2}.

7. La expresión de la energía cinética relativista de una partícula de masa m que se mueve a velocidad v es $E_c = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - m_0c^2$, donde m_0 es la masa en reposo. Verifique que si $v \ll c \Rightarrow$ la energía cinética se reduce a la expresión cásica $E_c = \frac{1}{2}mv^2$. Indique también cual es el término siguiente en el desarrollo en serie de E_c en potencias de v/c.

8. Considere las funciones

$$f(x) = \frac{e^x - 1 - x}{x^2}, \qquad g(x) = \frac{\log(1+x)}{x}, \qquad h(x) = (1+x)^{s/x},\ s \in \mathbb{R}$$

   a) Determine los límites de estas funciones cuando $x \to 0$. Compare con los resultados obtenidos por el método de L'Hôpital.

   b) Determine sus polinomios de Taylor de grado 1 alrededor de $x = 0$ (Suponga que en $x = 0$ se definen de modo tal que resulten continuas).

9. Encuentre el radio de convergencia de las siguientes series y el dominio de las funciones a las cuales convergen. Escribir la serie que representa a las derivadas y determinar el dominio de las mismas:

$$a)\ \sum_{1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n3^n}, \qquad b)\ \sum_{2}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-3)^n}{n(n-1)}$$

Ejercicios para realizar con Mathematica

1. Grafique las siguientes funciones y sus polinomios de Taylor de grado 1,2,4,10 alrededor de $x = 0$ en un mismo gráfico. Pruebe cambiar el intervalo en el que gráfica. Obtenga la diferencia entre el valor exacto que obtiene Mathematica para $f(1)$ (recuerde escribirlo como 1,0) y el del polinomio de Taylor de grado 10.

$$a)\ f(x) = e^x, \qquad b)\ f(x) = \sin x \qquad c) f(x) = xe^{-x^2} \ln(1+x)$$