Matemáticas Especiales Física Médica

Prof. Aníbal Iucci
JTP Mariela Nieto
Año 2022

Práctica 1: Sucesiones y series

1. Escribir los primeros cinco términos de cada una de las sucesiones cuyo término general es el siguiente:

$$a)\ a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \qquad b)\ a_n = \frac{(-1)^n}{n!} \qquad c)\ a_n = \frac{1}{2^n} \qquad d)\ a_n = \frac{(2n)}{n^2+1}$$

2. Hallar el término general a_n, de cada una de las siguientes suceciones:

$$a)\ 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \ldots \qquad b)\ 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots \qquad c)\ \frac{1}{2}, \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}, \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}, \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}, \ldots$$
$$d)\ \frac{1}{2}, -\frac{4}{9}, \frac{9}{28}, -\frac{16}{65}, \ldots \qquad e)\ \frac{1}{2}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{12}, -\frac{1}{20}, \ldots \qquad f)\ 1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{9}, \frac{1}{7}, -\frac{1}{12}, \ldots$$

3. Determinar cuáles de las siguentes suceciones son monótonas, y evaluar el límite $\lim_{n\to\infty} a_n$ (en todos los casos $n \geqslant 1$). Graficar los primeros cinco términos:

$$a)\ a_n = \frac{n+1}{n!} \qquad b)\ a_n = \frac{100^n}{n!} \qquad c)\ a_n = \frac{e^n - 1}{n}$$

4. Probar, usando la definición de límite, que el $\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n+1}$ no puede ser igual a $\frac{3}{2}$.

5. Evaluar las siguientes series, escribiendo a_n en la forma $a_n = f(n) - f(n+k)$ y determinando la expresión exacta de la suma parcial $S_n = a_1 + \ldots + a_n$.

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \qquad b)\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{4}{n^2-1} \qquad c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \log\left(\frac{n}{n+1}\right) \qquad d)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)}{n^2(n+1)^2}$$

6. Indicar cuales de las siguientes series geométricas convergen, y evaluarlas en caso de que converjan:

$$a)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n+1}{5^n} \qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-2^n}{3^n} \qquad c)\ \sum_{n=}^{\infty} \frac{-1+5^n(-1)^n}{6^n} \tag{1}$$

Evaluar también la sumas parciales S_n en el caso $a)$.

7. Se pide a un banco un préstamo de 10.000 pesos, siendo la devolución del mismo en la forma de cuotas mensuales donde el monto de cada cuota es el 90 por ciento de la cuota anterior. Si la primera cuota es de 1.000 pesos, ¿Se llega alguna vez a devolver al banco la totalidad de la suma prestada?, ¿y la mitad de la suma prestada?

8. Si una pelota que se deja caer al piso desde una altura h rebota hasta una altura rh, con $0 < r < 1$, mostrar que la distancia total recorrida hasta detenerse es $d = h(1+r)/(1-r)$.

9. Determinar cuáles de las siguientes series son convergentes, y en tal caso si convergen absoluta o condicionalmente:

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2} \qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\sqrt{n}}{n^3+1} \qquad c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} \qquad d)\ \sum_{n=1}^{\infty} \sin(2/n)$$
$$e)\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log n} \qquad f)\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^2} \qquad g)\ \sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n} \qquad h)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3}$$
$$i)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+4}} \qquad j)\ \sum_{n=1}^{n} (-1)^n \sin(\frac{1}{n}) \qquad k)\ 1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \ldots$$

10. Determinar cuantos términos deben ser sumados para estimar las siguientes series con un error menor que 10^{-2}:

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \qquad c)\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{\ln n}$$

11. Sabemos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ es divergente. ¿Pueden las sumas parciales S_N superar el valor 100? Estime un valor de N tal que esto ocurre.

12. Considere la sucesión definida en forma recursiva

$$a_{n+1} = 1 - \frac{1}{2(1+a_n)}, \quad a_1 = 1$$

Demuestre que es monótona y acotada. Demuestre que converge a $L = 1/\sqrt{2}$.

Ejercicios para realizar con Mathematica

1. Considere las sumas parciales

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}$$

Obtenga valores de S_N para $N = 10$ y para $N = 100$ (en forma decimal). Calcule el valor de la serie (en el límite $N \to \infty$) y encuentre el error cometido al aproxmar la serie por las sumas parciales.

2. Considere las sumas parciales

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$$

Obtenga valores de S_N para $N = 10$, $N = 100$, y $N = 1000$ (en forma decimal). ¿Qué ocurre? Pruebe calcularla para $N = \infty$.