Matemáticas Especiales II (2^o semestre) Año 2014

Prof: M. Reboiro — JTP: M. Matera

Práctica 1 — ODEs

Problemas de Valores Iniciales

Existencia y unicidad. Método de Picard

Problema 1. La condición de Lipschitz.
Muestre que

1. $f(x, y) = 4x^2 + y^2$ es Lipschitz-continua en la variable y sobre el rectángulo $R = \{(x, y) : |x| < 1, |y| \leq 1\}$.
2. $f(x, y) = x^2 \cos^2(y) + y \sin^2(x)$ es Lipschitz-continua en la variable y sobre la franja $S = \{(x, y) : |x| \leq 1\}$.
3. $f(x, y) = \sqrt{y}$ no es Lipschitz-continua en la variable y sobre el rectángulo $R = \{(x, y) : |x| < 1, 0 \leq y \leq 1\}$, mientras que sí lo cumple para cualquier $R = \{(x, y) : |y| < a, b \leq y \leq c, \text{con } a, b, c > 0\}$.
4. una condición suficiente para que una función f sea Lipschitz-continua en la variable y sobre R es que $\frac{\partial f}{\partial y}$ exista y esté acotada sobre R.

Problema 2. Utilize el método de Picard con $u^{[0]}(0) = 1$ para obtener las aproximaciones sucesivas a la solución de

$$\frac{du(t)}{dt} = u(t), \quad u(0) = 1$$

Observe que en este caso u_n se corresponde con el desarrollo en serie de potencias de $\exp(t)$ a orden n ¿En qué intervalo converge la serie obtenida? ¿Cuál es el intervalo de convergencia que garantiza el teorema de Picard? Encuentre una cota para el error máximo que se comete al cortar la recurrencia en el paso n-ésimo dentro del intervalo $[0, a)$ para un dado a

Problema 3. * Considere la ecuación diferencial

$$\frac{du}{dt} = -\lambda u^2, \quad u(0) = u_0$$

1. Encuentre la solución de la ecuación diferencial en forma analítica (Tip: puede hacerse por separación de variables).
2. Verifique que localmente satisface las condiciones de existencia y unicidad. Luego determine la región de convergencia de la solución predicha por el teorema de Picard.
3. Construya los primeros tres elementos de la sucesión de Picard $u^{(0)}(t) = u_0$, $u^{(i+1)}(t) = u_0 + \int_0^t (u^{(i+1)}(v))^2 dv$ y compare con la expansión en serie de potencias de la solución encontrada en el punto anterior.
4. Encuentre una cota para el error máximo que se comete al cortar la recurrencia en el paso n-ésimo dentro del intervalo $[0, a)$ para un dado $a > 0$
5. (Opcional) Muestre que el elemento k-esimo de la sucesión de Picard coincide hasta $\mathcal{O}(t^k)$ con el desarrollo en serie de potencias de la solución exacta.
6. Muestre que para $\lambda > 0$ la solución existe más allá de la región de convergencia de las aproximaciones sucesivas de Picard.
7. Muestre que para $\lambda < 0$ la solución existe sólo dentro de la región de convergencia. Utilizando la condición de Lipschitz, muestre que la existencia de solución única sólo puede garantizarse en una región tal que $|x| < |\lambda u_0|^{-1}$.

Problema 4. *Existencia y unicidad de las soluciones Para los siguientes problemas de valores inciales, determine en qué casos se cumplen las condiciones de existencia y unicidad. Luego encuentre sus soluciones.

1. $y'(x) = -\lambda y(x) \;\; y(0) = 1$.
2. $y'(x) = y(x) \log x \;\; \lim_{x\to 0} y(x) = 0$.
3. $y'(x) = x \log y(x) \;\; y(0) = 1$. (Tip: analizar el cambio de variables $y(x) = \exp(-u(x))$).
4. $y'(x) = -2|y| \;\; y(0) = 1$

Problema 5. * Encuentre todas las posibles soluciones a la ecuación diferencial $y'(x) = \frac{y(x)^\alpha}{1-\alpha} \;\; y(0) = 0$. en función del parámetro α. Determine para qué valores de α el teorema de existencia y unicidad predice la existencia de la solución, y en qué casos es única. ¿A qué converge el método de Picard en este caso? Encuentre una cota para el error máximo que se comete al cortar la recurrencia en el paso n-ésimo dentro del intervalo $[0, a)$ para un dado $a > 0$.

Problema 6. Sea $y'(x) = F(x, y(x))$ con $y(0) = 0$ y $F(x, y)$ definida como

$$F(x,y) = \begin{cases} 2x & y \le 0 \\ 2x - 4y/x & 0 < y \le x^2 \\ -2x & y > x^2 \end{cases}$$

1. Mostrar que existen soluciones.
2. Mostrar que la sucesión $y_n(x) = y(0) + \int_0^x F(u, y_{n-1}(u))du$ con $y_0(0) = y(0)$ no converge, y que niguna de las subsucesiones convergentes converge a una solución de la ecuación. Usar este resultado para mostrar que $F(x, y)$ no es Lipschitz-continua en y.
3. Resolver el problema y mostrar que tiene solución única.

Problema 7. Analice el problema $u' = qu/t$ con $u(t) = u_0$. Muestre que el problema sólo tiene solución si $u_0 = 0$, y que en este caso, la solución es única si $q < 0$, mientras que existen infinitas soluciones para $q > 0$

Métodos de resolución analítica

Problema 8. *Variables separables, diferencial exacto y factor integrante . Encuentre expresiones analíticas para la solución general de las siguientes ecuaciones:

1. $u' = -\frac{u^2+(t+1)\,u+(t+2)t}{2u+t}$
2. $u' = -\frac{u-1}{x+3}$
3. $u' = (1 + u^2)\tan t$
4. $u' = -\frac{ye^{xy}-\frac{1}{y}}{xe^{xy}+\frac{x}{y}}$
5. $u' = -\lambda u + f$

Problema 9. * Método de variación de las constantes Utilizando el método de variación de las constantes, resuelva la ecuación diferencial $y'(t) + 2y(t) = f(t)$ con $y(0) = 0$, para

1. $f(t) = b\cos(\omega t)$
2. $f(t) = b\exp(-t/a)$

Problema 10. Ecuaciones Autónomas . Muestre que si en una ecuación diferencial que relaciona una función $y(x)$ con sus derivadas hasta un cierto orden no aparece explícitamente la variable independiente, por medio de la transformación $u(y) = y'(x)$ es posible reducir el orden de la ecuación diferencial. Utilizando este método encuentre las soluciones generales para las siguientes ecuaciones diferenciales:

1. $y''(x) + y(x)y'(x) = 0$
2. $y(x)y''(x) + (y'(x))^2 = 0$

Problema 11. Ecuaciones Equidimensionales Resuelva la ecuación $u''(t) = \frac{u(t)u'(t)}{t}$ reduciéndola a una ecuación autónoma. Muestre que la solución general es

$$u(t) = A\tan(2A\log(t) + B) - 1,$$

pero que existen soluciones particulares $u(t) = C$ y $u(t) = -1 - \frac{1}{2\log(t)+C}$. y expliquen cómo aparecen en el proceso de solución.

Problema 12. Ecuación de Bernoulli Una ecuación diferencial de primer orden de la forma $y'(x) + P(x)y(x) + Q(x)(y(x))^r = 0$, con $P(x)$ y $Q(x)$ funciones continuas en el intervalo (a, b) y r un número real se conoce como "Ecuación de Bernoulli".

1. ¿ A qué se reduce la ecuación en los casos particulares $r = 0$ y $r = 1$?

2. Demostrar que para $r \neq 0, 1$ la sustitución $u(x) = y^{1-r}$ transforma la ecuación de Bernoulli en una ecuación lineal.

3. Hallar la solución general de $xy' + 2y - 2x^3\sqrt{y}$.

Problema 13. Soluciones en términos de expansiones en serie. Ec. de Bessel. La ecuación

$$x\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy(x)}{dx}\right) + (x^2 - n^2)y(x) = 0$$

se conoce como "Ecuación de Bessel de orden n".

1. Analice el comportamiento asintótico de las soluciones en torno a $x = 0$.

2. Analice el comportamiento asintótico de las soluciones en el límite $x \to \infty$.

3. Proponga una solución en forma de serie de potencias $y(x) = x^\alpha \sum_k a_k x^k$ y encuentre una relación de recurrencia entre los a_k.

4. Estudie el rango de convergencia de la serie.

5. Grafique las soluciones para $n = 0$, $1/2$ y 1.

Problema 14. Soluciones en términos de expansiones en serie. Ec. de Legendre. La ecuación

$$\frac{d}{dx}\left((1 - x^2)\frac{dy(x)}{dx}\right) + \lambda(\lambda + 1)y(x) = 0$$

se conoce como "Ecuación de Legendre".

1. Analice el comportamiento asintótico de las soluciones en torno a $x = 0$.

2. Proponga una solución en forma de serie de potencias $y(x) = \sum_k a_k x^k$ y encuentre una relación de recurrencia entre los a_k. Analice el caso en que λ es un entero no negativo.

3. Estudie el rango de convergencia de la serie en función de λ.