
Práctica VI: Ecuaciones diferenciales y Desarrollo de Fourier

1. i. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

   (a) $\frac{dv}{dt} = -g$, (b) $m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$, (c) $L\frac{dI}{dt} + RI = \epsilon(t)$, (d) $y' = \tan y$, (e) $yy' = 1$, (f) $y'^2 = xy$

   ii. Indicar cuáles son lineales, y cuáles tienen fuentes.

   iii. Interpretar físicamente las ecuaciones (a), (b) y (c).

2. Considerar un cuerpo de masa m que cae bajo la acción del campo gravitatorio terrestre. Tener en cuenta el efecto de la resistencia del aire modelando la fuerza de rozamiento con el aire como proporcional a la velocidad del cuerpo v. Llamando b al factor de proporcionalidad con la velocidad y considerando la aceleración debida a la gravedad como constante, g:

   (i) Plantear la ecuación de movimiento en términos de la velocidad $v(t)$ y resolverla considerando que la partícula parte del reposo

   (ii) Hallar el valor límite de $v(t)$ para tiempos largos.

3. Considerar la ecuación diferencial no lineal $\frac{dN}{dt} = -kN^2$. Resolverla: (a) mediante integración directa, (b) proponiendo una serie de potencias en t de la forma $N(t) = n_0 + n_1 t + n_2 t^2 + \ldots$, hallar los valores de n_i imponiendo que $N(t)$ sea solución de la ecuación diferencial.

   Considerar el caso $k < 0$ (i.e. $\frac{dN}{dt} = \alpha N^2$ con $\alpha > 0$) y mostrar que la solución $N(t)$ diverge en un tiempo finito (comportamiento explosivo).

4. Considerar el movimiento de una partícula cargada en el plano xy bajo la acción de un campo magnético $\boldsymbol{B}$ transverso al plano. A partir de la fuerza de Lorentz $\boldsymbol{F} = q\,\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$ resolver el movimiento de la partícula expresando la ley de Newton $\boldsymbol{F} = m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$ en forma matricial como

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = A\mathbf{v} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbf{v}(t) = e^{At}\mathbf{v}_0$$

   Hallar e^{At} diagonalizando A.

5. Hallar la solución general de: (i) $y'' + 2y' + y = 0$, (ii) $y^{(4)} - y = 0$, (iii) $y^{(3)} + 3y'' + 3y' + y = 0$

6. Resolver la función de Green causal para el oscilador amortiguado subcrítico

$$m\ddot{G}(t) + \beta\dot{G}(t) + kG(t) = \delta(t)$$

   (i) mediante el pegado de soluciones de la ecuación homogénea, (ii) transformando Fourier. Es única la solución?

7. Hallar la función de Green $G(x,\xi)$ que satisface

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - \lambda^2\right) G = \delta(x-\xi), \qquad 0 \le x \le 1, \quad 0 \le \xi \le 1$$

   siendo $\lambda \in \mathbb{R}$, donde G satisface las condiciones de contorno $G(0,\xi) = G(1,\xi) = 0$. Luego mostrar que la solución a la ecuación

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \lambda^2 y = f(x) \tag{1}$$

   sujeta a las mismas condiciones de contorno es

$$y(x) = -\frac{1}{\lambda\sinh\lambda}\left[\sinh\lambda(1-x)\int_0^x d\xi f(\xi)\sinh\lambda\xi + \sinh\lambda x\int_x^1 d\xi f(\xi)\sinh\lambda(1-\xi)\right] \tag{2}$$

8. Variación de parámetros: existe un método alternativo general para resolver el problema lineal con fuentes dado por

$$a\, y_p''(x) + b\, y_p'(x) + c\, y = f(x) \tag{3}$$

La receta, propuesta por Bernouilli para ecuaciones de 1er orden y luego por Lagrange para ecuaciones de 2do orden, es la siguiente:

1. Resolver la solución del sistema homogéneo hallando $y_h(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$

2. La solución de la particular se encuentra proponiendo que las constantes $C_i \to u_i(x)$ pasen a depender de x

$$y_p(x) = u_1(x) y_1(x) + u_2(x) y_2(x) = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{y}$$

De manera que tenemos dos incógnitas a determinar $\boldsymbol{u} = (u_1(x), u_2(x))$, luego, necesitamos 2 ecuaciones.

3. Insertando la propuesta en (3) obtendremos una ecuación, a efectos de tener una segunda ecuación debemos imponer una condición sobre $\boldsymbol{u}$. Puesto que al derivar y_p obtenemos $y_p' = \boldsymbol{u}' \cdot \boldsymbol{y} + \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{y}'$, una condición que podemos imponer es $\boldsymbol{u}' \cdot \boldsymbol{y} = 0$. El sistema de ecuaciones que resulta para $\boldsymbol{u}$ bajo estas condiciones es

$$a(\boldsymbol{u}' \cdot \boldsymbol{y}' + \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{y}'') + b\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{y}' + c\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{y} = f \to \boldsymbol{u} \cdot (a\boldsymbol{y}'' + b\boldsymbol{y}' + c\boldsymbol{y}) + a\, \boldsymbol{u}' \cdot \boldsymbol{y}' = f \to \dot{\boldsymbol{y}} \cdot \dot{\boldsymbol{u}} = \frac{1}{a} f \to \begin{array}{l} \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{u}' = 0 \\ \boldsymbol{y}' \cdot \boldsymbol{u}' = \frac{1}{a} f(x) \end{array}$$

El sistema de ecuaciones puede ser escrito como

$$W\boldsymbol{u}' = \boldsymbol{f}, \qquad W = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{a} f \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{u}(x) = \int^x dx' W^{-1}(x') \boldsymbol{f}(x') \tag{4}$$

La matriz W se denomina Wrosnkiano del sistema y resulta ser no singular.

Empleando este punto de vista reobtener (2). Para satisfacer las condiciones de contorno será necesario elegir convenientemente los limites de integración en (4), o equivalentemente, sumar una conveniente solución de la homogénea de (3).

9. Resonancia: Considerar el sistema amortiguado dado por

$$x'' + \beta x' + \omega_0^2 x = A \sin \omega t, \qquad \beta, \omega_0 > 0$$

1. Con el fin de hallar la solución particular considerar como fuente $A \sin \omega t \to A e^{i\omega t}$, proponer como solución $x_p(t) = X(\omega) e^{i\omega t}$, hallar $X(\omega)$ insertnado en la ecuación y luego tomar la parte imaginaria.

2. Considerar la situación sub-amortiguada y mostrar que la amplitud resulta máxima, como función de ω, cuando el sistema es excitado con la frecuencia efectiva $\omega = \omega_{eff} = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\beta^2}{4}}$.

3. Comparar este caso con el sistema RLC: en dicho caso la frecuencia de resonancia coincide con la frecuencia ω_0. La diferencia se debe a que en el caso RLC al resolver la ecuación aparece una dependencia en ω multiplicando la amplitud de la fuente. En términos efectivos corresponde a sustituir $A \to i\omega A$ en la ecuación diferencial.

10. Función de Green: Hallar la función de Green para[1]

$$\frac{d^2}{dx^2} G = q\delta(x - \xi)$$

1. Hallar la función de Green que satisface $G(-\infty) = 0$

2. Considerar $\xi = 0$ y hallar la solución que satisface $G(x) = G(-x)$

11. Series de Fourier: Hallar el desarrollo en serie de Fourier de las funciones siguientes en el intervalo $x \in [-L, L]$. Emplear la forma real del desarrollo. Graficar la función y la suma parcial con $n = 1$. Empleando algún programa graficar los primeros 5, 10 y 15 términos de los desarrollos.

(i) $f(x) = 1$.
(ii) $f(x) = x$. Derivar este desarrollo y verificar si coincide con el desarrollo de (i).
(iii) $f(x) = x^2$. Derivar el desarrollo de $x^2/2$ y verificar si coincide con el desarrollo de (ii).

[1] Este problema puede ser interpretado como el potencial electrostático de una partícula puntual en 1d, por qué? Alternativamente, puede ser interpretado como la función de Green para la partícula libre, por qué?

12. Siendo $\tilde{f}(k) = \mathcal{F}[f](k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} f(x)$ la transformada de Fourier de $f(x)$ y definiendo la convolución de funciones f, g como $h(x) = f \star g = \int_{-\infty}^{\infty} dy f(y) g(x-y)$ probar las siguientes propiedades:
    (a) $g(x) = f(ax) \leftrightarrow \tilde{g}(k) = \frac{1}{|a|}\tilde{f}(\frac{k}{a})$
    (b) $g(x) = f(x-a) \leftrightarrow \tilde{g}(k) = e^{-ika}\tilde{f}(k)$
    (c) $g(x) = xf(x) \leftrightarrow \tilde{g}(k) = i\frac{d\tilde{f}}{dk}$
    (d) $f \star g = g \star f$
    (e) $h = f \star g \quad \leftrightarrow \quad \tilde{h}(k) = \tilde{f}(k)\tilde{g}(k)$
    (f) $f(x) = \pm f(-x) \Rightarrow \tilde{f}(-k) = \pm \tilde{f}(k)$

13. Transformada de Fourier: considerar las siguientes funciones, definidas en el intervalo finito $|x| < c$, siendo nulas fuera del mismo:
    (a) $f(x) = 1$
    (b) $f(x) = e^{iax}$
    (c) $f(x) = \sin ax$
    (d) $f(x) = \cos ax$

14. Gaussiana: Mostrar que la transformada de Fourier de una Gaussiana es una Gaussiana. Los anchos de las mismas son inversos uno del otro, esto es

$$f(x) = e^{-x^2/(2a)^2} \leftrightarrow \ \tilde{f}(k) = a e^{-a^2k^2/2}$$

15. Hallar la función cuya transformada de Fourier es $(1+k^4)^{-1}$.

16. Método de Picard/Dyson/Lippman-Schwinger/...: Considerar el sistema lineal de primer orden $\frac{d\mathbf{u}}{dt} = A(t)\mathbf{u}$.
    (i) Mostrar que esta ecuación puede ser equivalentemente expresada en forma integral como

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(t_0) + \int_{t_0}^{t} dt' A(t')\mathbf{u}(t)$$

(ii) Mostrar que puede ser resuelta iterativamente reexpresando el $\mathbf{u}$ en el lado derecho de la ecuación por la ecuación misma, obteniendo

$$\begin{aligned}\mathbf{u}(t) =& \mathbf{u}(t_0) + \int_{t_0}^{t} dt' A(t')\mathbf{u}(t_0) + \int_{t_0}^{t} dt' A(t') \int_{t_0}^{t'} dt'' A(t'')\mathbf{u}(t_0) \\ &+ \int_{t_0}^{t} dt' A(t') \int_{t_0}^{t'} dt'' A(t'') \int_{t_0}^{t''} dt''' A(t''')\mathbf{u}(t_0) + \ldots\end{aligned}$$

(iii) Podemos decir entonces que la expresión final para $\mathbf{u}(t)$ es

$$\mathbf{u}(t) = U(t)\mathbf{u}(t_0)$$

donde

$$U(t) = 1 + \int_{t_0}^{t} dt' A(t') + \int_{t_0}^{t} dt' A(t') \int_{t_0}^{t'} dt'' A(t'') + \int_{t_0}^{t} dt' A(t') \int_{t_0}^{t'} dt'' A(t'') \int_{t_0}^{t''} dt''' A(t''') + \ldots$$

A la matriz $U(t)$ se la conoce como matriz fundamental del sistema. Noten que las matrices A en esta expression se encuentran ordenadas temporalmente: en cada término las matrices de izquierda a derecha se encuentran ordenadas de manera que su argumento satisface $t' > t'' > t''' > ...$

(iv) Para el caso de matrices que conmuten a distintos tiempos $A(t)A(t') = A(t')A(t)$, mostrar que

$$\int_{t_0}^{t} dt' A(t') \int_{t_0}^{t'} dt'' A(t'') = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} dt' A(t') \int_{t_0}^{t} dt'' A(t'') = \frac{1}{2}\left(\int_{t_0}^{t} dt A(t)\right)^2$$

y analogamente para términos de orden superior

$$\int_{t_0}^{t} dt_1 A(t_1) \int_{t_0}^{t_1} dt_2 A(t_2) \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n A(t_n) = \frac{1}{n!} \left(\int_{t_0}^{t} dt A(t) \right)^n$$

Luego podemos escribir

$$U(t) = e^{\int_{t_0}^{t} dt' A(t')}$$

Nota: En el caso de que las matrices no comuten, se define un operador de ordenamiento temporal T como

$$T[A(t)A(t')] = \begin{cases} A(t)A(t'), & t > t' \\ A(t')A(t), & t' > t \end{cases}$$

Para el caso general de matrices $A(t)$ que no comutan a distintos tiempos, la matriz fundamental resulta

$$U(t) = T e^{\int_{t_0}^{t} dt" A(t')}$$

Esta expresión debe ser entendida como un desarrollo en serie donde cada término debe ser ordenado temporalmente por la acción de T.